중학수학

절대강자

특목에 강하다! 경시에 강하다!

최상위

정답 및 해설

3·1

Ⅰ. 실수와 그 연산

1 제곱근과 실수

핵심 문제 01

6쪽

1 ③　**2** $-\sqrt{11}$　**3** $-3x$

4 다섯 자리의 수　**5** ②　**6** ⑤

1 ③ $(-3)^2$의 제곱근은 ±3이므로 $a=\pm3$

2 169의 제곱근은 ±13이고

$a<b$이므로 $a=-13$, $b=13$

$\sqrt{2b-7a+4}=\sqrt{121}=11$

따라서 11의 음의 제곱근은 $-\sqrt{11}$이다.

3 $3x+4<2x+4 \qquad \therefore x<0$

$-\sqrt{16x^2}+(-\sqrt{-3x})^2+\sqrt{(-4x)^2}$

$=-(-4x)+(-3x)+(-4x)$

$=4x-3x-4x=-3x$

4 $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$

$50=5^2\times2=\sqrt{2^2\times5^4}$

(주어진 식)$=\sqrt{2^2\times5^4\times2^8\times3^4\times5^2\times7}$

$=\sqrt{2^{10}\times3^4\times5^6\times7}$

$=\sqrt{9072\times2^6\times5^6}$

$=\sqrt{9072}\times10^3$

$95<\sqrt{9072}<100$이므로 $\sqrt{9072}$는 두 자리의 수이다.

따라서 $\sqrt{9072}\times10^3$은 다섯 자리의 수이다.

5 $2475=(3\times5)^2\times11$

$\therefore a=11$

$23^2<572<24^2$

$\therefore b=24^2-572=4$

$\therefore a+b=11+4=15$

6 $[\sqrt{x}\,]=11 \Rightarrow 11\le\sqrt{x}<12 \Rightarrow 121\le x<144$

$[\sqrt{100x}\,]=110 \Rightarrow 110\le\sqrt{100x}<111$

$\Rightarrow 11\le\sqrt{x}<11.1$

$\Rightarrow 121\le x<123.21$

$\therefore \dfrac{123.21-121}{144-121}=\dfrac{2.21}{23}=\dfrac{221}{2300}$

응용 문제 01

7쪽

예제 1 $<$, $>$, $a-b$, $b-a$, b, a, $a-b$ / $a-b$

1 (1) x　(2) $-a-5b$　**2** 4　**3** 24개

4 3

1 (1) $0<x<2$이므로

$x-2<0$, $2-x>0$, $-2<-x<0$

$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(-x)^2}$

$=-(x-2)-(2-x)-(-x)$

$=-x+2-2+x+x$

$=x$

(2) $a<0$, $b>0$이므로

$3a<0$, $-3b<0$, $-2a>0$, $2b>0$, $a-b<0$

$\sqrt{9a^2}=\sqrt{(3a)^2}=-3a$, $\sqrt{(-3b)^2}=-(-3b)=3b$

$\sqrt{(-2a)^2}=-2a$, $\sqrt{4b^2}=\sqrt{(2b)^2}=2b$

$\sqrt{(\sqrt{9a^2}-\sqrt{(-3b)^2})^2}-\sqrt{(\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{4b^2})^2}$

$=\sqrt{(-3a-3b)^2}-\sqrt{(-2a+2b)^2}$

$=\sqrt{\{-3(a+b)\}^2}-\sqrt{\{-2(a-b)\}^2}$

$=-3(a+b)-\{-2(a-b)\}$

$=-3a-3b+2a-2b$

$=-a-5b$

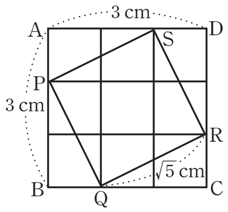
2 $5.\dot{a}=5+0.\dot{a}=5+\dfrac{a}{9}=\dfrac{45+a}{9}$

$\sqrt{5.\dot{a}}=\sqrt{\dfrac{45+a}{9}}$가 유리수이므로 $45+a$는 0 또는 제곱수가 되어야 한다.

$45+a=49, 64, 81, \cdots$에서 $a=4, 19, 36, \cdots$

따라서 한 자리의 자연수 a는 4이다.

3 오른쪽 그림과 같은 정사각형 PQRS의 넓이가 5 cm^2이므로 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ cm이다. 즉, 가로 2 cm, 세로 1 cm 또는 가로 1 cm, 세로 2 cm인 직사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{5}$ cm이다.



따라서 모두 24개이다.

4 $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}=x$이면 $\sqrt{a+x}=x$임을 이용한다.

$x=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}\,\right)^2=3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$

즉, $x^2=3+x$

$\therefore x^2-x=3$

핵심 문제 02

8쪽

1 ②, ④　　**2** (1) 5　(2) 19개　　**3** ③

1 □ 안에 들어갈 말은 '실수'이다.

② 근호를 사용하여 나타낸 수 중 근호가 벗겨지는 수는 유리수이다. $\sqrt{4}=2$

④ 무한소수 중 순환하는 무한소수는 유리수이고, 순환하지 않은 무한소수는 무리수이다.

2 (1) $f(33)$은 $\sqrt{33}$의 정수 부분이다.

$5<\sqrt{33}<6$이므로 $f(33)=5$

(2) $f(n)=9$이므로

$9\le\sqrt{n}<10$

$81\le n<100$

따라서 자연수 n의 개수는 $100-81=19$(개)

3 $\sqrt{\left(\dfrac{19}{4}\right)^2}=\dfrac{19}{4}=4.75$

$7-\sqrt{3}=7-1.732=5.268$

따라서 A는 ㉢ 구간에 속하는 수이다.

㉢ 구간에 속하는 수를 찾으면 ③ 5.4이다.

응용 문제 02

9쪽

예제 2 121, $\sqrt{120}$, $\sqrt{120}$, 2, 10, 2, 10, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$, -1 / -1

1 4명　　**2** 2　　**3** 2.145, 2　　**4** ㄱ, ㄷ

1 나현 : $\sqrt{0.0121}=0.11$은 유한소수(유리수)이므로 B에만 속한다.

동수 : 수직선은 무리수(C)에 대응하는 점으로 빈틈없이 채울 수 없다.

명진 : (반례) $\sqrt{3}-1$, $-\sqrt{3}$은 모두 무리수이지만 $(\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}=-1$은 A에 속한다.

보람 : $-\sqrt{2}$와 -1 사이에는 음의 정수가 없다.

2 (나)에서 $1\le\sqrt{nx}<2$이므로 $1\le nx<4$

(가)에 의해 $nx=1, 2, 3$　　$\therefore x=\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}$

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}=3$, $\dfrac{6}{n}=3$　　$\therefore n=2$

3 $2y-2x=4x-12y$, $6x=14y$, $x=\dfrac{7}{3}y$

$$\frac{2x+3y}{2x-3y}=\sqrt{\frac{2\times\frac{7}{3}y+3y}{2\times\frac{7}{3}y-3y}}=\sqrt{\frac{\frac{23}{3}y}{\frac{5}{3}y}}$$

$$=\sqrt{\frac{23}{5}}=\sqrt{4.6}=2.145$$

따라서 가장 가까운 정수는 2이다.

4 ㄱ. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 무리수이고 두 정수 m, n으로 이루어진 $\dfrac{n}{m}$(단, $m\ne0$)은 유리수이므로 정수 m, n은 존재하지 않는다.

ㄴ. 5와 6 사이의 자연수의 양의 제곱근을 $\sqrt{x}$라 하면

$5<\sqrt{x}<6$, $25<x<36$

따라서 $\sqrt{x}$는 $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\cdots$, $\sqrt{35}$의 10개이다.

ㄷ. $2n=\sqrt{4n^2}$, $3n=\sqrt{9n^2}$이므로 구하는 점의 개수는

$(9n^2-1)-(4n^2+1)+1=5n^2-1$

이때 n이 홀수이면 $5n^2-1$은 짝수, n이 짝수이면 $5n^2-1$은 홀수이다.

핵심 문제 03

10쪽

1 ③　　**2** (1) 10　(2) $\dfrac{1}{2}k$　　**3** $2\sqrt{5}$

4 $a=3\sqrt{3}$, $d=2\sqrt{2}$　　**5** (1) 4, 16　(2) 98

1 ① $\sqrt{6000}=10\sqrt{60}$

② $\sqrt{61000}=100\sqrt{6.1}$

③ $\sqrt{60100}=100\sqrt{6.01}$

④ $\sqrt{0.601}=\dfrac{1}{10}\sqrt{60.1}$

⑤ $\sqrt{0.000611}=\dfrac{1}{100}\sqrt{6.11}$

2 (1) $a\sqrt{b}=10\sqrt{0.63}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$　　$\therefore a+b=10$

(2) $\sqrt{3.25}=\sqrt{\dfrac{325}{100}}=\dfrac{\sqrt{325}}{10}=\dfrac{5\sqrt{13}}{10}=\dfrac{1}{2}k$

3
$$a\sqrt{\frac{2b}{9a}}+b\sqrt{\frac{8a}{9b}}=\sqrt{a^2\times\frac{2b}{9a}}+\sqrt{b^2\times\frac{8a}{9b}}$$
$$=\sqrt{\frac{2ab}{9}}+\sqrt{\frac{8ab}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{20}{9}}+\sqrt{\frac{80}{9}}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$$

4 $\dfrac{3\sqrt{2}}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{d}{2\sqrt{3}}$이므로

$$a=\frac{(3\sqrt{2})^2}{2\sqrt{3}}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

$$d=\frac{(2\sqrt{3})^2}{3\sqrt{2}}=\frac{12}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

5 (2) k는 1, 2, 3이고

(ⅰ) $k=1$일 때, $x=7\times1^2=7$

(ⅱ) $k=2$일 때, $x=7\times2^2=28$

(ⅲ) $k=3$일 때, $x=7\times3^3=63$

$\therefore 7+28+63=98$

응용 문제 03

11쪽

예제 3 2, 3, 2, 1, 4, 4, 1,
2, 1, 3, 3, 7, $3-\sqrt{2}$ / $3-\sqrt{2}$

1 $\frac{11}{15}$배 **2** 9 **3** $\frac{20\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{5}$

4 4

1 $x=\sqrt{3}$을 대입하면

$$y=\sqrt{3}-\cfrac{1}{\sqrt{3}+\cfrac{1}{\sqrt{3}+\cfrac{1}{\sqrt{3}}}}=\sqrt{3}-\cfrac{1}{\sqrt{3}+\cfrac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{3}-\frac{4}{5\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{15}=\frac{11}{15}\sqrt{3}$$

따라서 y는 x의 $\frac{11}{15}$배이다.

2 $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$, $5<\sqrt{32}<6$이므로 $4\sqrt{2}$의 정수 부분은 5이고, 소수 부분은 $4\sqrt{2}-5$이다. $\therefore a=4\sqrt{2}-5$

$\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$, $\frac{1}{8}<\frac{\sqrt{2}}{8}<\frac{2}{8}$의 정수 부분은 0이고,

소수 부분은 $\frac{\sqrt{2}}{8}$이다. $\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{8}$

주어진 식에 대입하면

$$(4\sqrt{2}-5+1)x+2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}y+1\right)=0$$

$$(-4x+2)+\left(4x+\frac{1}{4}y\right)\sqrt{2}=0$$

$-4x+2=0$, $4x+\frac{1}{4}y=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$, $y=-8$

$\therefore 2x-y=1+8=9$

3 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$(AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$

$(\overline{AD}+\overline{DB}):\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$

$(2\sqrt{5}-1+1+\sqrt{5}):(2\sqrt{5}-1)=6\sqrt{2}:x$

$3\sqrt{5}:(2\sqrt{5}-1)=6\sqrt{2}:x$

$3\sqrt{5}x=6\sqrt{2}(2\sqrt{5}-1)$

$$x=\frac{12\sqrt{10}-6\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{5}$$

4 $\overline{OA}=\sqrt{a}$, $\overline{OB}=2\overline{OA}=2\sqrt{a}=\sqrt{x}$

$x=4a$이므로 $16=4a$ $\therefore a=4$

핵심 문제 04

12쪽

1 $-4+4\sqrt{2}$ **2** $(8\sqrt{3}+16\sqrt{6}+18\sqrt{2}+18)\text{ cm}^2$

3 $\frac{9}{2}$ **4** (1) 324 (2) $\frac{1}{15}$ **5** 0

1 피타고라스 정리에 의해

$\overline{CA}=\overline{CP}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\overline{DF}=\overline{DQ}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

점 P에 대응하는 수는 $-1+2\sqrt{2}$

점 Q에 대응하는 수는 $3-2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}=-1+2\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2})=-4+4\sqrt{2}$

2 (직육면체의 겉넓이)

$=2\times\{(\sqrt{6}+\sqrt{3})\times2\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{3})\times3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\times3\sqrt{3}\}$

$=2\times(4\sqrt{3}+2\sqrt{6}+9\sqrt{2}+9+6\sqrt{6})$

$=2\times(4\sqrt{3}+8\sqrt{6}+9\sqrt{2}+9)$

$=8\sqrt{3}+16\sqrt{6}+18\sqrt{2}+18(\text{cm}^2)$

3 $\sqrt{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{k}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2-\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3}}+3$$

$$=1+\frac{3\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}k}{3}$$

$$=1+\left(\frac{3}{2}-\frac{k}{3}\right)\sqrt{6}$$

유리수가 되기 위해서는

$\frac{3}{2}-\frac{k}{3}=0$ $\therefore k=\frac{9}{2}$

4 (1) $a=\sqrt{2}$이므로 $[a+2]=3$, $<a+3>=5$

(주어진 식)$=(3+3\times5)^2=324$

⑵ $2<\sqrt{2}+1<3$이므로

$<b>=3,\ <b-1>=2,\ [b+1]=3$

(주어진 식)$=\dfrac{2-3}{3}+\dfrac{2}{2+3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{15}$

5 $(\sqrt{2}\circledcirc 3\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{3}-3(\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

$=6\sqrt{3}-3\sqrt{2}-9\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

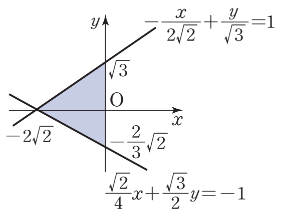
$(-3\sqrt{2}-3\sqrt{3})\circledcirc\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}\times(-3\sqrt{2}-3\sqrt{3})\times\sqrt{3}-3(-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{3})$

$=-6\sqrt{3}-9\sqrt{2}+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

$=0$

3 오른쪽 그림에서 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하면



$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

4 $3<\sqrt{10}<4$이므로

$2<\sqrt{10}-1<3 \qquad \therefore [a]=2$

$\dfrac{[a]}{a+1}-\dfrac{a+1}{[a]}$

$=\dfrac{2}{(\sqrt{10}-1)+1}-\dfrac{(\sqrt{10}-1)+1}{2}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{10}}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}-\dfrac{5\sqrt{10}}{10}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore k=-\dfrac{3}{10}$

응용문제 04

13쪽

예제 4 $1,\ 1,\ 1,\ x,\ 3,\ x,\ 3,\ -2\,/\,x=3,\ y=-2$

1 $2\sqrt{15}-10$ **2** $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ **3** $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ **4** $-\dfrac{3}{10}$

1 $2\sqrt{2}x-2\sqrt{5}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$

$\sqrt{2}x=-\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

$\therefore x=-1+\sqrt{10}$

두 방정식의 해가 일치하므로 $x=-1+\sqrt{10}$을 $\sqrt{6}(x+3)-k=\sqrt{10}(x+1)+2\sqrt{6}$에 대입하면

$\sqrt{6}(-1+\sqrt{10}+3)-k=\sqrt{10}(-1+\sqrt{10}+1)+2\sqrt{6}$

$2\sqrt{15}+2\sqrt{6}-k=10+2\sqrt{6}$

$\therefore k=2\sqrt{15}-10$

2 $\begin{cases}\sqrt{7}x+\sqrt{2}y=1 & \cdots ㉠\\ \sqrt{2}x-\sqrt{7}y=1 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠$\times\sqrt{2}-$㉡$\times\sqrt{7}$을 하면

$9y=\sqrt{2}-\sqrt{7} \qquad \therefore y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{9}$

㉠$\times\sqrt{7}+$㉡$\times\sqrt{2}$를 하면

$9x=\sqrt{7}+\sqrt{2} \qquad \therefore x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{9}$

즉, $a=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{9},\ b=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{9}$이므로

$a+b=\dfrac{2\sqrt{2}}{9},\ a-b=\dfrac{2\sqrt{7}}{9}$

$\therefore \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}\times\dfrac{9}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

핵심문제 05

14쪽

1 $a^2,\ a,\ \sqrt{a},\ \dfrac{1}{\sqrt{a}},\ \dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}$ **2** ⑤

3 $2\sqrt{2}-\sqrt{3},\ 3-\sqrt{3},\ \sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+\sqrt{2}$ **4** ③

5 ②

1 주어진 식을 각각 제곱하면

$\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2},\ \dfrac{1}{a^4},\ a,\ a^2,\ a^4$

$0<a<1$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이라 하고 각 식에 대입하면

$2,\ 4,\ 16,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}$

따라서 작은 것부터 나열하면 $a^2,\ a,\ \sqrt{a},\ \dfrac{1}{\sqrt{a}},\ \dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}$

2 ① $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{(-\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}-1$

② $\sqrt{(-b)^2}=\sqrt{(-2)^2}=2$

③ $a+1=\sqrt{2}-1+1=\sqrt{2}$

④ $b-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{\{(\sqrt{2}-1)+2\}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$

이때 ①, ②, ③, ④에서 가장 큰 수는 ② 2

②, ⑤를 비교하면 $2-(\sqrt{2}+1)=1-\sqrt{2}<0$

$\therefore 2<\sqrt{2}+1$

따라서 가장 큰 수는 ⑤ $\sqrt{2}+1$이다.

3 $1<\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{3}+1<\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}<3$이므로 $2\sqrt{2}-\sqrt{3}<3-\sqrt{3}$

$\sqrt{3}+1-(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2>0$

$\therefore 2\sqrt{2}-\sqrt{3}<3-\sqrt{3}<\sqrt{3}+1<\sqrt{3}+\sqrt{2}$

4 $x=yz$(y, z는 서로 다른 소수)

$xyz=(yz)\times yz=(yz)^2$

$100<xyz<400$에서

$100<(yz)^2<400$

$10<yz<20$

yz는 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 중에서

서로 다른 소수의 곱으로 이루어진 수이므로 14, 15이다.

$(\because 14=2\times7,\ 15=3\times5)$

따라서 $14+15=29$이다.

5 $\sqrt{2}(x+1)\le\sqrt{3}(x+1)$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})x\le\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore x\ge-1$ $\cdots$ ㉠

$\sqrt{3}x-2\sqrt{6}\le\sqrt{6}-\sqrt{3}x$

$2\sqrt{3}x\le3\sqrt{6}$

$\therefore x\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-1\le x\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a=-1$, $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로

$4b^2-a^2=4\times\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-(-1)^2=18-1=17$

응용문제 05

15쪽

예제 5 4, 4, 5, >, 45, 5, 45, 50 / 50

1 8 **2** ④ **3** $x=9$, $y=19$

4 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\le x\le2\sqrt{2}$

1 $3.2<\sqrt{\dfrac{x}{2}}<4.5$, $10.24<\dfrac{x}{2}<20.25$

$20.48<x<40.5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 20개이고, 가장 큰 자연수는 40이다.

$\therefore a=20$, $b=40$

이때 $\sqrt{\dfrac{ab}{n}}=\sqrt{\dfrac{20\times40}{n}}=\sqrt{\dfrac{2^5\times5^2}{n}}$이 자연수가 되게 하는 자연수 n의 값은 2, 2^3, 2^5, 2×5^2, $2^3\times5^2$, $2^5\times5^2$이므로 두 번째로 작은 자연수 n의 값은 8이다.

2 (i) $x<-\dfrac{2}{3}$이면 $3x-2<0$, $3x+2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(3x-2)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}&=-(3x-2)-(3x+2)\\&=-6x\end{aligned}$$

(ii) $-\dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{2}{3}$이면 $3x-2<0$, $3x+2>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(3x-2)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}&=-(3x-2)+3x+2\\&=4\end{aligned}$$

(iii) $x>\dfrac{2}{3}$이면 $3x-2>0$, $3x+2>0$이므로

$$\sqrt{(3x-2)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}=3x-2+3x+2=6x$$

3 $1.4<\sqrt{\dfrac{y}{x}}\le1.5$에서 $1.96<\dfrac{y}{x}\le2.25$

이때 $y>x$(x, y는 서로소)이므로 $y=x+10$

$1.96<\dfrac{x+10}{x}\le2.25$에서 각 변에 x를 곱하여 풀면

$8\le x<10\dfrac{5}{12}$

따라서 x가 8, 9, 10일 때, y는 18, 19, 20이다.

그런데 x, y는 서로소이므로 $x=9$, $y=19$

4 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$$\begin{cases}4\sqrt{2}x-2\le5\sqrt{2}x+2 & \cdots ㉠\\ 5\sqrt{2}x+2\le3\sqrt{2}x+10 & \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $-\sqrt{2}x\le4$ $\therefore x\ge-2\sqrt{2}$

㉡에서 $2\sqrt{2}x\le8$ $\therefore x\le2\sqrt{2}$

㉠, ㉡에서 $-2\sqrt{2}\le x\le2\sqrt{2}$ $\cdots$ ㉢

한편, 근호 안의 수는 0 이상이어야 하므로

$4\sqrt{2}x-2\ge0$에서 $x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$5\sqrt{2}x+2\ge0$에서 $x\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$3\sqrt{2}x+10\ge0$에서 $x\ge-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

$\therefore x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\cdots$ ㉣

따라서 부등식의 해는 ㉢, ㉣에 의해서 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\le x\le2\sqrt{2}$

심화 문제

16~21쪽

01 24 **02** $-2a+2b$ **03** $a+1-2\sqrt{a}$
04 $-1\le a\le 1$ **05** 12 **06** $\frac{\sqrt{6}}{4}$
07 ㉣ **08** 75 **09** $(7,\ 57)$, $(9,\ 59)$
10 25 **11** $\frac{9+5\sqrt{3}}{3}$ **12** $11-3\sqrt{2}$ **13** 3
14 $(12-4\sqrt{2})$ cm **15** 6 **16** 6
17 14 **18** -1

01 $\sqrt{n^2+100}=k(k>0)$이라 하면

$n^2+100=k^2$, $(k+n)(k-n)=100$

$k+n$, $k-n$의 값은 모두 자연수이므로 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

	①	②	③	④	⑤
$k+n$	100	50	25	20	10
$k-n$	1	2	4	5	10

①, ③, ④, ⑤에서 k, n 모두 자연수가 아니고, ②에서 $k+n=50$, $k-n=2$를 연립하여 풀면 $k=26$, $n=24$이다.

$\therefore n=24$

02 $a<b$, $ab<0$이므로 $a<0$, $b>0$

(주어진 식)$=\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(-a+b)^2}$

$=-(a-b)+(-a+b)$

$=-2a+2b$

03 n의 제곱수를 a라 하면 $n^2=a$이므로 $n=\sqrt{a}$

따라서 다음으로 작은 제곱수는

$(n-1)^2=n^2-2n+1=a+1-2\sqrt{a}$

04 주어진 방정식은 $a<-1$, $-1\le a<1$, $a\ge 1$의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a<-1$일 때

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}=-(a-1)-(a+1)=2$,

$a=-1$

따라서 조건 내에 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $-1\le a<1$일 때

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}=-(a-1)+(a+1)=2$,

(우변)$=2$이므로 $-1\le a<1$

(iii) $a\ge 1$일 때

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}=(a-1)+(a+1)=2$, $a=1$

따라서 조건 내에 만족시키는 a의 값은 1뿐이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 $-1\le a\le 1$

05 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=4$에서

$4^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=x+4$

$\therefore x=12$

06 $1<\sqrt{3}<2$, $2<\sqrt{3}+1<3$이므로

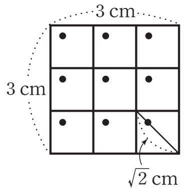
$<a>=2$, $[a]=\sqrt{3}-1$

$2<2\sqrt{2}<3$, $3<2\sqrt{2}+1<4$이므로

$<b>=3$, $[b]=2\sqrt{2}-2$

(주어진 식)$=\frac{\sqrt{3}-1-3+4}{2+2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

07 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9개로 균등분할하고 여기에 10개의 점을 찍는다면 두 점 사이의 간격을 아무리 멀리 찍으려 해도 어느 한 칸에는 두 개의 점이 찍히므로 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ cm 이하인 것이 반드시 존재하게 된다.



08 $(2.1)^2<(\sqrt{x})^2<(3.5)^2$에서 $4.41<x<12.25$이므로

$a=5$, $b=12$

$\sqrt{\frac{bn}{a}}=\sqrt{\frac{12n}{5}}=\sqrt{\frac{2^2\times 3\times n}{5}}$이므로

$n=3\times 5\times m^2$(m은 자연수)

$m=1$일 때, $n=15$이고, $m=2$일 때, $n=60$이고

$m\ge 3$이면 n은 세 자리의 자연수이다.

$\therefore$ (두 자리 자연수 n의 값들의 합)$=15+60=75$

09 $2.5\le\sqrt{\frac{y}{x}}<3.5$이므로 각 변을 제곱하면

$6.25\le\frac{y}{x}<12.25$ ⋯ ㉠

따라서 $\frac{y}{x}>1$이므로 $y>x$

$\therefore x-y=-50$, $y=x+50$

㉠에 $y=x+50$을 대입하면

$6.25\le\frac{x+50}{x}<12.25$, $6.25\le 1+\frac{50}{x}<12.25$

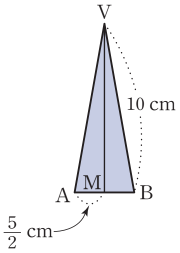
$5.25\le\frac{50}{x}<11.25$, $\frac{1}{11.25}<\frac{x}{50}\le\frac{1}{5.25}$

$\frac{50}{11.25}<x\le\frac{50}{5.25}$, $4.444\cdots<x\le 9.523\cdots$

따라서 x의 값이 5, 6, 7, 8, 9일 때, y의 값은 55, 56, 57, 58, 59이다.

그런데 x, y는 서로소이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(7,\ 57)$, $(9,\ 59)$이다.

10 직각삼각형 VOB에서
$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}=5(\mathrm{cm})$,
$\overline{\mathrm{VO}}=5\sqrt{3}(\mathrm{cm})$이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{VB}}=10(\mathrm{cm})$
옆면 VAB는 이등변삼각형이고,
점 V에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{5}{2}(\mathrm{cm})$



△VAM에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{VM}}=\frac{5}{2}\sqrt{15}(\mathrm{cm})$

따라서 옆면을 이루는 한 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}\sqrt{15}=\frac{25}{4}\sqrt{15}(\mathrm{cm}^2)$

$\therefore k=\frac{25}{4}$이므로 $4k=25$

11 $\overline{\mathrm{PM}}=\frac{5+2\sqrt{3}-(-1+\sqrt{3})}{2}=\frac{6+\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{MR}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{PM}}=\frac{1}{3}\times\frac{6+\sqrt{3}}{2}=\frac{6+\sqrt{3}}{6}$

따라서 점 R에 대응하는 수는

$(-1+\sqrt{3})+\frac{6+\sqrt{3}}{2}+\frac{6+\sqrt{3}}{6}=\frac{9+5\sqrt{3}}{3}$

12 (ⅰ) $S_1=2,\ S_2=\frac{1}{2}S_1=\frac{1}{2}\times2=1,\ S_3=\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

$\therefore S_1+S_2+S_3=2+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=a$

(ⅱ) $S_1=2$에서 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2}$, $S_2=1$에서 $\overline{\mathrm{BB_1}}=1$,

$S_3=\frac{1}{2}$에서 $\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\overline{\mathrm{OB_2}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{BB_1}}+\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$

$4<3\sqrt{2}<5$이므로 $6<3\sqrt{2}+2<7$, $3<\frac{3\sqrt{2}+2}{2}<\frac{7}{2}$

따라서 $\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$의 정수 부분은 3, 소수 부분은

$\frac{3\sqrt{2}+2}{2}-3=\frac{3\sqrt{2}+4}{2}=b$

$\therefore 2(a-b)=2\times\frac{7-3\sqrt{2}+4}{2}=11-3\sqrt{2}$

13 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $a=\sqrt{2}-1$

$0<\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(a+3)x-by+6=0$에서

$(\sqrt{2}+2)x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+6=0$, $(2x+6)+\left(x-\frac{1}{2}y\right)\sqrt{2}=0$

$2x+6=0$, $x-\frac{1}{2}y=0$이므로 $x=-3$, $y=-6$

$\therefore x-y=3$

14 넓이의 비가 1 : 2 : 4이므로 한 변의 길이의 비는 $1:\sqrt{2}:2$
세 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, $\sqrt{2}a$, $2a$라 하면

$4a(3+\sqrt{2})=56$에서 $a=\frac{14}{3+\sqrt{2}}=6-2\sqrt{2}$

따라서 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $12-4\sqrt{2}(\mathrm{cm})$

15 $\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(50)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{51}-\sqrt{50})$$
$$=\sqrt{51}-1$$

따라서 $\sqrt{49}<\sqrt{51}<\sqrt{64}$에서 $6<\sqrt{51}-1<7$이므로
수직선 위에서 가장 가까운 정수는 6이다.

16 $\sqrt{n}=a+b$이므로 $b=\sqrt{n}-a$

$$a^3-9ab+b^3=a^3-9a(\sqrt{n}-a)+(\sqrt{n}-a)^3$$
$$=a^3-9a\sqrt{n}+9a^2+n\sqrt{n}-3na+3\sqrt{n}a^2-a^3$$
$$=(9a^2-3na)+(3a^2-9a+n)\sqrt{n}=0$$

$9a^2-3na=0$에서 $3a=n$

$3a^2-9a+n=0$에서 $3a^2-9a+3a=0$ $\therefore a=2$

$\therefore n=3\times2=6$

$\therefore (3a)^{\frac{n}{6}}=(3\times2)^{\frac{6}{6}}=6$

17 $4-2\sqrt{3}$의 양의 제곱근이 $(1+\sqrt{3})x$이므로

$\{(1+\sqrt{3})x\}^2=4-2\sqrt{3}$에서

$(4+2\sqrt{3})x^2=4-2\sqrt{3}$

$\therefore x^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$4+2\sqrt{3}$의 양의 제곱근이 $(1-\sqrt{3})y$이므로

$\{(1-\sqrt{3})y\}^2=4+2\sqrt{3}$에서

$(4-2\sqrt{3})y^2=4+2\sqrt{3}$

$\therefore y^2=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$$\therefore x^2+y^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}}{1}$$
$$=14$$

18 $\{(\sqrt{5}+\sqrt{3})x+(\sqrt{5}-\sqrt{3})y\}(\sqrt{5}+\sqrt{3})=\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$에서

$(8+2\sqrt{15})x+2y=5+\sqrt{15}$ ⋯ ㉠

$\{(\sqrt{5}-\sqrt{3})x-(\sqrt{5}+\sqrt{3})y\}(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$에서

$(8-2\sqrt{15})x-2y=-3+\sqrt{15}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{1+\sqrt{15}}{8}$, $y=\frac{1-\sqrt{15}}{8}$

$\therefore [x]+[y]=0+(-1)=-1$

최상위 문제

22~27쪽

01 97　**02** (5, 121), (20, 36), (45, 1)
03 $\frac{121}{9}$　**04** $\frac{2}{a^2}-2a^2$　**05** $\frac{1}{2}$　**06** 60
07 2개　**08** 80　**09** 13　**10** $2a$
11 $6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+16$
12 n이 홀수일 때 -4, n이 짝수일 때 4
13 15　**14** 82개　**15** 18　**16** 37
17 0　**18** $56-7\sqrt{2}$

01 $\sqrt{n}=t$라 하면 $\sqrt{[\sqrt{n}]}=[\sqrt{\sqrt{n}}]$은 $\sqrt{[t]}=[\sqrt{t}]$이다.

$10\le n<100$에서 $3<t<10$　$\therefore \sqrt{3}<\sqrt{t}<\sqrt{10}$

(i) $3<t<4$일 때, $[\sqrt{t}]=1$이고, $[t]=3$이므로 $\sqrt{[t]}\ne[\sqrt{t}]$

(ii) $4\le t<9$일 때, $[\sqrt{t}]=2$이고, $[t]=4, 5, 6, 7, 8$이므로

$t=4$일 때 $\sqrt{[t]}=[\sqrt{t}]$　$\therefore n=16$

(iii) $9\le t<10$일 때, $[\sqrt{t}]=3$이고, $[t]=9$이므로

$t=9$일 때 $\sqrt{[t]}=[\sqrt{t}]$　$\therefore n=81$

따라서 (i)~(iii)에 의해

(두 자리 정수 n의 값의 합)$=16+81=97$

02 $\sqrt{5a}+\sqrt{b}$가 자연수이므로 $\sqrt{5a}$, $\sqrt{b}$도 자연수이다.

이때 $a=5\times m^2$, $b=n^2$(m, n은 자연수)라 하면

$\sqrt{5a}+\sqrt{b}=\sqrt{5^2m^2}+\sqrt{n^2}=5m+n=16$이므로

순서쌍 (m, n)은 $(1, 11)$, $(2, 6)$, $(3, 1)$이다.

따라서 (a, b)는 $(5, 121)$, $(20, 36)$, $(45, 1)$

03 원점을 O(0)이라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{4}=2$, $\overline{OB}=\sqrt{49}=7$, $\overline{AB}=5$이고,

$\overline{OP}=x$라 하면 $\overline{AP}=x-2$, $\overline{PB}=7-x$

$2\overline{AP}=\overline{PB}$이므로

$2(x-2)=7-x$에서 $x=\frac{11}{3}$

따라서 점 P의 눈금의 값은 $x^2=\frac{121}{9}$

04 $\sqrt{4x^2-16x}=\sqrt{4x(x-4)}$

$(\sqrt{x})^2=x=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$이므로

$x-4=a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

$a-\frac{1}{a}<0$이므로

$$\sqrt{4x(x-4)}=\sqrt{4\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$$
$$=-2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$\therefore \sqrt{4x^2-16x}=\frac{2}{a^2}-2a^2$

05 $2<\sqrt{7}<3$이므로 $2<5-\sqrt{7}<3$

$\left[\frac{3}{<5-\sqrt{7}>}\right]=\left[\frac{3}{2}\right]=\left[1+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$

06 $\sqrt{400-x}$는 가장 큰 정수가 되어야 하고, $\sqrt{100+y}$는 가장 작은 정수가 되어야 한다.

$\sqrt{400-x}<20$이므로 $\sqrt{400-x}=19$　$\therefore x=39$

$\sqrt{100+y}>10$이므로 $\sqrt{100+y}=11$　$\therefore y=21$

$\therefore x+y=60$

07 좌변의 값이 0 이상이므로 $x\ge1$

$\sqrt{(1-\sqrt{(1-\sqrt{(1-x)^2})^2})^2}=\sqrt{(1-\sqrt{(2-x)^2})^2}$

(i) $1\le x<2$일 때,

$\sqrt{(1-\sqrt{(2-x)^2})^2}=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$

이므로 $x=1$

(ii) $x\ge2$일 때,

$\sqrt{(1-\sqrt{(2-x)^2})^2}=\sqrt{(3-x)^2}$

① $2\le x<3$일 때,

$\sqrt{(3-x)^2}=3-x=x-1$이므로 $x=2$

② $x\ge3$일 때,

$\sqrt{(3-x)^2}=x-3=x-1$이므로 x의 값은 없다.

따라서 주어진 식을 만족시키는 x의 값은 1, 2의 2개이다.

08 $\sqrt{2^8+2^{11}+2^a}$이 정수이므로 $2^8+2^{11}+2^a=n^2$이라 하면

$2^8+2^{11}=2^8(1+2^3)=48^2$이므로

$2^a=n^2-48^2=(n+48)(n-48)$

$n+48=2^b$, $n-48=2^c$($b>c$)라 하면

$2^a=2^b\times2^c=2^{b+c}$, $a=b+c$

$2^b-2^c=96=2^5\times3$

$2^c(2^{b-c}-1)=2^5\times3$

$2^c=2^5$, $2^{b-c}-1=3$에서 $c=5$, $b=7$

따라서 $a=12$이므로

$\sqrt{2^8+2^{11}+2^{12}}=\sqrt{2^8(1+2^3+2^4)}=\sqrt{2^8\times5^2}=80$

09 (i) $x\geq1$일 때, $\sqrt{(x-3)^2}=a$

(ii) $x<1$일 때, $\sqrt{(x+1)^2}=a$

a	$\sqrt{(x-3)^2}$	$\sqrt{(x+1)^2}$	x의 개수
0	$x=3$	$x=-1$	2개
1	$x=2,\ 4$	$x=-2,\ 0$	4개
2	$x=1,\ 5$	$x=-3$	3개
3	$x=6$	$x=-4$	2개
4	$x=7$	$x=-5$	2개

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=13$

10 $y=4a(x-3)-4a^3$이므로

$x+a\{4a(x-3)-4a^3\}=5a^2+4$

$(1+4a^2)x=4a^4+17a^2+4$

$(1+4a^2)x=(4a^2+1)(a^2+4)$

$1+4a^2>0$이므로 $x=a^2+4$, $y=4a(a^2+1)-4a^3=4a$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}&=\sqrt{a^2+4+4a}-\sqrt{a^2+4-4a}\\&=\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{(a-2)^2}\\&=a+2+a-2=2a\end{aligned}$$

11 겹치는 부분인 정사각형의 한 변의 길이는 겹치기 전의 작은 정사각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 5개의 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{16}=4$이고 겹치는 부분의 네 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$이다.

∴ (새로 만든 도형의 둘레의 길이)

=(처음 5개의 정사각형의 둘레의 길이의 합)

−(겹치는 부분의 네 정사각형의 둘레의 길이의 합)

$$\begin{aligned}&=4\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4)\\&\qquad-4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\\&=4\times(3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+4)-4\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\\&=12\sqrt{2}+12\sqrt{3}+16-6\sqrt{2}-6\sqrt{3}\\&=6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+16\end{aligned}$$

12 $x^{5n}=a$, $y^{5n}=b$라 하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\\&=4x^{5n}y^{5n}=4(xy)^{5n}=4\{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)\}^{5n}\\&=4(-1)^{5n}\end{aligned}$$

(i) n이 홀수일 때, $4(-1)^{5n}=-4$

(ii) n이 짝수일 때, $4(-1)^{5n}=4$

13 $\sqrt{a-\sqrt{32}}\geq0$이므로 $\sqrt{x}\geq\sqrt{y}$에서 $x\geq y$

$\sqrt{a-\sqrt{32}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$의 양변을 제곱하면

$a-\sqrt{32}=x+y-2\sqrt{xy}$

$a-2\sqrt{8}=x+y-2\sqrt{xy}$

$a=x+y$, $xy=8$, $x\geq y$이므로

$x=8$, $y=1$ 또는 $x=4$, $y=2$

따라서 $a=9$ 또는 $a=6$이므로 a의 값들의 합은 15이다.

14 $0.821<\sqrt{5}-\sqrt{2}<0.823$이므로 $(\sqrt{5}-\sqrt{2})a<82.3$이다.

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})a$가 될 수 있는 자연수는 1, 2, ⋯, 82이다.

따라서 구하는 실수 a의 개수는 82개이다.

15 $\sqrt{5}$의 소수 부분은 $\sqrt{5}-2$이므로

$y_0=\sqrt{5}-2$, $x_1=\frac{1}{y_0}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$y_1=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2$, ⋯

$\therefore x_1=x_2=\cdots,\ y_0=y_1=y_2=\cdots$

$\therefore x_n=\sqrt{5}+2$, $y_n=\sqrt{5}-2$이므로 ${x_n}^2+{y_n}^2=18$

16

$$\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}<\frac{1}{2}<\cancel{1}$$

$$\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{101}-\cancel{\sqrt{100}}<\frac{1}{2\sqrt{100}}<\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$이므로

위와 같은 부등식들의 각 변을 더하면

$\sqrt{101}-1<\frac{1}{2}S<\sqrt{100}$

$2\sqrt{101}-2<S<20$

$18<S<20$

따라서 $18<S<19$이면 $[S]=18$,

$19\leq S<20$이면 $[S]=19$

이므로 $18+19=37$

17 $2023^2<2023^2+1<2024^2$에서

$2023<\sqrt{2023^2+1}<2024$

즉, $\sqrt{2023^2+1}$의 정수 부분은 2023이므로

$f(2023)=\sqrt{2023^2+1}-2023$

$$\begin{aligned}\therefore \{f(2023)+2023\}^2&=(\sqrt{2023^2+1}-2023+2023)^2\\&=(\sqrt{2023^2+1})^2\\&=2023^2+1\end{aligned}$$

따라서 2023^2의 일의 자리의 숫자는 9이므로 2023^2+1의 일의 자리 숫자는 0이다.

18 $f(x)=\dfrac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}=\dfrac{x(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{x}=x-\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\therefore\ & f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)+f(32)\\ &=(1-\sqrt{1})+(2-\sqrt{2})+(4-\sqrt{4})+(8-\sqrt{8})\\ &\quad+(16-\sqrt{16})+(32-\sqrt{32})\\ &=(2+4+8+16+32)-(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}+\sqrt{32})\\ &=62-(\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2})\\ &=56-7\sqrt{2}\end{aligned}$$

특목고 / 경시대회 실전문제

28~30쪽

01 $A>0$　**02** $\dfrac{1}{9}$　**03** $\sqrt{18}$ 또는 $3\sqrt{2}$

04 $\sqrt{2}-1$　**05** 4　**06** $x=\dfrac{9}{2}$, $y=2$, $z=8$

07 3개　**08** 405　**09** $a=\sqrt{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

01 $\sqrt{(n+1)^2+n+1}=\sqrt{n^2+3n+2}=\sqrt{(n+1)(n+2)}$

$\sqrt{(n+1)(n+2)}<\dfrac{(n+1)+(n+2)}{2}=\dfrac{2n+3}{2}$이고,

$n+1<n+1.5<n+2$이므로

$[\sqrt{(n+1)(n+2)}]^2<\left[\dfrac{2n+3}{2}\right]^2=[n+1.5]^2=(n+1)^2$

$\therefore A=(n+1)^2+n-(n+1)^2=n>0$

02 $\sqrt{70-ab}$가 자연수가 되려면 $70-ab$는 70보다 작은 제곱수이어야 한다.

① $70-ab=64=8^2$에서 $ab=6$
② $70-ab=49=7^2$에서 $ab=21$
③ $70-ab=36=6^2$에서 $ab=34$
④ $70-ab=25=5^2$에서 $ab=45$
⑤ $70-ab=16=4^2$에서 $ab=54$
⑥ $70-ab=9=3^2$에서 $ab=61$
⑦ $70-ab=4=2^2$에서 $ab=66$
⑧ $70-ab=1^2$에서 $ab=69$

따라서 ①~⑧에서 ab의 값은 6, 21, 34, 45, 54, 61, 66, 69이고, a, b는 각각 1부터 6까지의 숫자이어야 하므로 $ab=6$뿐이다.
그러므로 주사위를 두 번 던져 나올 수 있는 모든 경우는 $6\times6=36$(가지)이고, $ab=6$인 경우의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4가지이므로

구하는 확률은 $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$이다.

03 $(4, \bar{4}, \bar{8})=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$

이므로 이 값은 4보다 크고 5보다 작은 무리수이다.

$\sqrt{18}=4+(\sqrt{18}-4)$, $\sqrt{18}-4=\dfrac{2}{\sqrt{18}+4}$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{18}&=4+\frac{2}{\sqrt{18}+4}=4+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{18}+4}{2}}\\ &=4+\cfrac{1}{\cfrac{4+(\sqrt{18}-4)+4}{2}}\\ &=4+\cfrac{1}{\cfrac{8+(\sqrt{18}-4)}{2}}=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{\sqrt{18}-4}{2}}\\ &=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{\cfrac{2}{\sqrt{18}+4}}{2}}=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{18}+4}}\\ &=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+(\sqrt{18}-4)}}=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{2}{\sqrt{18}+4}}}\\ &=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\cdots}}}}}=(4, \bar{4}, \bar{8})\end{aligned}$$

이므로 $\sqrt{18}$ 또는 $3\sqrt{2}$이다.

04 $(\sqrt{2}+1)^n=a$, $(\sqrt{2}-1)^n=b$라 할 때

$ab=1$이므로 $X=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$,

$X-1=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-1=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$에서 $a>b>0$이므로

$(\sqrt{X}-\sqrt{X-1})^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}=\{(\sqrt{2}-1)^n\}^{\frac{1}{n}}=\sqrt{2}-1$

05 $\dfrac{(1-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{(1+\sqrt{3})^2-4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$f(3)=f(\sqrt{3})+f(\sqrt{3})$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)-f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\ &=f(4)-f(\sqrt{3})-f(2)-f(\sqrt{3})+f(3)\\ &=f(4)-f(2)\end{aligned}$$

$f(2\times2)=f(2)+f(2)$에서 $f(4)=4+4=8$이므로

$f(4)-f(2)=8-4=4$

$\therefore$ (주어진 식)$=4$

06 $xy=u$, $yz=v$, $zx=w$라 하면

$\sqrt{uw}+\sqrt{uv}=39-u$ ⋯ ㉠

$\sqrt{uv}+\sqrt{wv}=52-v$ ⋯ ㉡

$\sqrt{uw}+\sqrt{wv}=78-w$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢에서

$2(\sqrt{uw}+\sqrt{uv}+\sqrt{wv})=169-(u+v+w)$,

$\sqrt{u^2}+\sqrt{v^2}+\sqrt{w^2}+2(\sqrt{uw}+\sqrt{uv}+\sqrt{wv})=169$,

$(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w})^2=169$이므로

$\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}=13$ ⋯ ㉣

㉠에서 $u+\sqrt{uw}+\sqrt{uv}=\sqrt{u}(\sqrt{u}+\sqrt{w}+\sqrt{v})=39$

$\therefore u=9$

같은 방법으로 ㉡에서 $v=16$, ㉢에서 $w=36$

즉, $xy=9$, $yz=16$, $zx=36$에서 $xyz=72$

$\therefore x=\frac{9}{2}$, $y=2$, $z=8$

07 연속하는 네 홀수 a, b, c, d를 각각

$2n-3$, $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$(n은 2 이상의 자연수)

이라 하면

$10.5\le\sqrt{a+b+c+d}<11.5$이므로

$10.5\le\sqrt{(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)}<11.5$

$\frac{21}{2}\le\sqrt{8n}<\frac{23}{2}$

각 변을 제곱하면

$\frac{441}{4}\le 8n<\frac{529}{4}$, $\frac{441}{32}\le n<\frac{529}{32}$

$\therefore 13.7\cdots\le n<16.5\cdots$

이 식을 만족시키는 자연수 n의 값은 14, 15, 16이다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$(25, 27, 29, 31)$, $(27, 29, 31, 33)$, $(29, 31, 33, 35)$

의 3개이다.

08 $\overline{B_1C}=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C$(AA 닮음)이고,

닮음비가 $3:2$이므로 $\overline{A_1B_1}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$

같은 방법으로 $\triangle A_nB_nC\backsim A_{n+1}B_{n+1}C$이고 닮음비가 $3:2$

이므로 모든 정삼각형의 둘레의 길이의 합은

$x=3\sqrt{5}+\frac{2}{3}(3\sqrt{5})+\left(\frac{2}{3}\right)^2(3\sqrt{5})+\left(\frac{2}{3}\right)^3(3\sqrt{5})+\cdots$ (㉠)

$\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}(3\sqrt{5})+\left(\frac{2}{3}\right)^2(3\sqrt{5})+\left(\frac{2}{3}\right)^3(3\sqrt{5})+\cdots$ (㉡)

㉠−㉡에서 $\left(1-\frac{2}{3}\right)x=3\sqrt{5}$이므로

$x=9\sqrt{5}$ $\quad\therefore x^2=405$

09 A_i, B_i($i=0, 1, 2, 3, \cdots$)들은 모두 닮은 직사각형들이므로

A_i용지의 긴 변을 x_i, 짧은 변을 y_1라 하면 $x_i:y_i=y_i:\frac{x_i}{2}$이

성립한다.

즉 $x_i:y_i=\sqrt{2}:1$이고, 마찬가지로 B_i용지의 긴 변과 짧은 변의 길이의 비는 $\sqrt{2}:1$이다.

또, A_0용지와 B_0용지의 넓이비가 $1:\frac{3}{2}$이므로

A_i와 B_i용지의 길이의 닮음비는 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$이다.

A_{i+1}, B_{i+1}용지의 넓이는 A_i, B_i용지 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

A_{i+1}, B_{i+1}용지와 A_i, B_i용지의 길이의 닮음비는 $1:\sqrt{2}$이다.

위의 사실을 종합하여 볼 때,

$A_5\to A_4$의 배율은 $\sqrt{2}$배

$B_4\to A_4$의 배율은 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$배$=\frac{\sqrt{6}}{3}$배

$B_5\to A_4$의 배율은 $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$배이다.

Ⅱ. 다항식의 곱셈과 인수분해

1 다항식의 곱셈

핵심 문제 01 32쪽

1 4 **2** 6 **3** ④ **4** ⑤
5 ②

1 $(x^2+ax+2)(2x^2-x+b)$
$=2x^4+(2a-1)x^3+(b-a+4)x^2+(ab-2)x+2b$
$2a-1=1$, $b-a+4=6$
$\therefore a=1$, $b=3$
$\therefore a+b=4$

2 $(a+3\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})$
$=(4a-18)+(12-2a)\sqrt{3}$
$12-2a=0 \qquad \therefore a=6$

3 $(\sqrt{48}+5)(\sqrt{48}-5)+(\sqrt{12}-\sqrt{6})^2$
$=48-25+12+6-12\sqrt{2}$
$=41-12\sqrt{2}$
$=a+b\sqrt{2}$
$\therefore a+2b=41+2\times(-12)=17$

4 $x-3=A$로 놓으면
$(x-y-3)(x+y-3)$
$=(A-y)(A+y)$
$=A^2-y^2$
$=x^2-6x+9-y^2$

5 $\sqrt{3}-2<0$이므로
$$x>\frac{(2\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}-2}$$
(우변)$=-(2\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+2)^2$
$\quad=-(2\sqrt{3}-5)(7+4\sqrt{3})$
$\quad=-(-11-6\sqrt{3})$
$\quad=11+6\sqrt{3}$
$\therefore x>11+6\sqrt{3}$
$6\sqrt{3}=\sqrt{108}$이므로
$10<6\sqrt{3}<11$, $21<11+6\sqrt{3}<22$
$x>11+6\sqrt{3}=21.\cdots$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 작은 정수는 22이다.

응용 문제 01 33쪽

예제 ① $\sqrt{20}+5$, $5+\sqrt{20}$, 5, 20, 4, 36, 24 / $36+24\sqrt{5}$

1 $\frac{20}{9}$ **2** ② **3** 4 **4** 8
5 -4

1 $A=(ax^2+2x-3)(x^2+bx+2)$
$\quad=ax^4+(2+ab)x^3+(2a+2b-3)x^2+(4-3b)x-6$
$(x^2$의 계수$)=2a+2b-3=0$,
$(x$의 계수$)=4-3b=0$
이므로 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{4}{3}$
$\therefore$ $(x^3$의 계수$)=2+ab=\frac{20}{9}$

2 $$\alpha+\beta=\frac{3(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}=\frac{3(1-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})}=\frac{12-6\sqrt{3}}{-2}$$
$\quad=-6+3\sqrt{3}$
$5<3\sqrt{3}<6$이므로 $-1<-6+3\sqrt{3}<0$
$\alpha=-1$, $\beta=3\sqrt{3}-5$
$\therefore \alpha-\beta=-1-(3\sqrt{3}-5)=4-3\sqrt{3}$

3 $$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$
$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
(주어진 식)
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$
$=-1+\sqrt{25}=4$

4 (주어진 식)$=\{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}\{-1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}$
$\qquad\times\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}\{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}$
$=\{-1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\}\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\}$
$=(5+2\sqrt{6}-1)(1-5+2\sqrt{6})$
$=(4+2\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})$
$=8$

5 $(\sqrt{5}-2)^n=A$, $(\sqrt{5}+2)^n=B$라고 놓으면
(주어진 식)$=(A-B)^2-(A+B)^2$
$=A^2-2AB+B^2-A^2-2AB-B^2$
$=-4AB$
$=-4(\sqrt{5}-2)^n(\sqrt{5}+2)^n$
$=-4\times1^n=-4$

핵심 문제 02

34쪽

1 ② **2** ⑤ **3** ③ **4** 88

1 $A=x^2-2xy+y^2$, $B=x^2-xy-6y^2$, $C=6x^2-7xy-5y^2$

$2A-[C-\{2B+(A-3B)\}]+2C$를 간단히 하면

$3A-B+C$

$3A-B+C$에 A, B, C를 각각 대입하면

$3(x^2-2xy+y^2)-(x^2-xy-6y^2)+6x^2-7xy-5y^2$

$=3x^2-6xy+3y^2-x^2+xy+6y^2+6x^2-7xy-5y^2$

$=8x^2-12xy+4y^2$

$\therefore$ (y^2의 계수)$-$(xy의 계수)$=4-(-12)=16$

2 $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)$

$=\{(x+1)(x-5)\}\{(x+2)(x-6)\}$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)$

$=(x^2-4x)^2-17(x^2-4x)+60$

$=x^4-8x^3+16x^2-17x^2+68x+60$

$=x^4-8x^3-x^2+68x+60$

$A=-8$, $B=-1$, $C=68$

$\therefore A-B+C=-8-(-1)+68=61$

3 잘못 보고 전개한 식을 세우면

$(5x+Ay)(7x-2y)=35x^2+(7A-10)xy-2Ay^2$

$7A-10=-31$, $-2A=-B$에서

$A=-3$, $B=-6$

$(Ax+4)(Bx-1)=(-3x+4)(-6x-1)$

$=18x^2-21x-4$

x^2의 계수는 18, x의 계수는 -21이므로

$18+(-21)=-3$

4 $\overline{\mathrm{BH}}=3y$($\because$ □ABHG는 정사각형)

$\overline{\mathrm{EF}}=5x-3y$($\because$ □EFDG는 정사각형)

$\overline{\mathrm{CF}}=3y-(5x-3y)=-5x+6y$

□EHCF$=(5x-3y)(-5x+6y)$

$=-25x^2+45x-18$

$A=-25$, $B=45$, $C=-18$

$\therefore |A-B+C|=|-25-45-18|$

$=|-88|=88$

응용 문제 02

35쪽

예제 2 3, 60, 3, 6, 3, 3, 7, 21, 3, 9, 9, 9 / ②, ⑤

1 99 **2** ⑤ **3** 20 **4** 85

1 $AB=(2^{99}-1)(5^{98}-1)$

$=2^{99}\times5^{98}-2^{99}-5^{98}+1$

$=2\times10^{98}-2^{99}-5^{98}+1$

따라서 AB의 자릿수는 2×10^{98}과 같으므로

AB는 $(98+1)$자리의 수이다.

$\therefore a=99$

2 $-x+y+z=6a+9$

$x-y+z=4a-1$

$x+y-z=-2a-3$

(주어진 식)$=(6a+9)^2+(4a-1)(-2a-3)$

$=36a^2+108a+81+(-8a^2-10a+3)$

$=28a^2+98a+84$

3 $\{(2x+1)(2x+3)\}\{(2x-3)(2x+7)\}+100$

$=(4x^2+8x+3)(4x^2+8x-21)+100$

$=(1+3)(1-21)+100(\because 4x^2+8x=1)$

$=4\times(-20)+100$

$=20$

4 $A=(\sqrt{2})^3+(1+2+3)\times(\sqrt{2})^2+(2+6+3)\times\sqrt{2}+6$

$=2\sqrt{2}+12+11\sqrt{2}+6$

$=18+13\sqrt{2}$

$B=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+4\sqrt{3})(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

$=2(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

$=2(2\sqrt{2}-4\sqrt{3}-15\sqrt{2}+18\sqrt{3})$

$=-26\sqrt{2}+28\sqrt{3}$

$A-B=18+13\sqrt{2}-(-26\sqrt{2}+28\sqrt{3})$

$=39\sqrt{2}-28\sqrt{3}+18$

따라서 $m=39$, $n=-28$, $k=18$이므로 $m-n+k=85$

핵심 문제 03

36쪽

1 $-2\sqrt{11}$ **2** ④ **3** 386 **4** $\frac{13}{4}$

5 8 **6** 5

1 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서 $10=9-2ab$ $\quad \therefore ab=-\frac{1}{2}$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=11$

$a-b=-\sqrt{11}$ $(\because a<b)$

$$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{-(a-b)}{ab}=\frac{\sqrt{11}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{11}$$

2

$$\begin{aligned}\frac{y-3}{x}+\frac{x-3}{y}&=\frac{y(y-3)+x(x-3)}{xy}\\&=\frac{x^2+y^2-3(x+y)}{xy}\\&=\frac{(x+y)^2-2xy-3(x+y)}{xy}\\&=\frac{8^2-2\times13-3\times8}{13}=\frac{14}{13}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=36-14=22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+y^4&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\&=22^2-2\times49=386\end{aligned}$$

4 $2x-\frac{2}{x}=2\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{5}$에서

$$x-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=\frac{5}{4}+2=\frac{13}{4}$$

5 $x^2-5x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 $1=0$이 되어 모순이다.

즉, $x\neq0$이므로 $x^2-5x+1=0$을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$ $\quad \therefore x+\frac{1}{x}=5$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=25-2=23$$

$$\begin{aligned}x^2-3x+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}&=x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=23-3\times5=8\end{aligned}$$

6 $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$이고 $5<\sqrt{28}<6$이므로

$2\sqrt{7}$의 정수 부분은 5이고, 소수 부분은 $2\sqrt{7}-5$이다.

$\therefore x=2\sqrt{7}-5$

$x=2\sqrt{7}-5$에서 $x+5=2\sqrt{7}$

양변을 제곱하면 $x^2+10x+25=28$

$\therefore x^2+10x=3$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{3x^2+30x+16}&=\sqrt{3(x^2+10x)+16}\\&=\sqrt{9+16}=5\end{aligned}$$

응용 문제 03

37쪽

예제 ③ 4, 4, 8, 8, 9, 9, 17, 19, 36 / 36

1 ① **2** 4 **3** $-846+376\sqrt{2}$ **4** 0

1

$$\begin{aligned}x-\sqrt{x^2-4}&=\left(a+\frac{1}{a}\right)-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}\\&=\left(a+\frac{1}{a}\right)-\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}\\&=\left(a+\frac{1}{a}\right)-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\\&=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\ \left(\because a<\frac{1}{a}\right)\\&=2a\end{aligned}$$

2 $(x-2)(y-2)=1$에서

$xy-2(x+y)+4=1$ $\quad \therefore x+y=3$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\left(\frac{x^2+x+y^2+y}{xy}\right)^2\\&=\left\{\frac{(x+y)^2-2xy+x+y}{xy}\right\}^2\\&=\left(\frac{9-6+3}{3}\right)^2=4\end{aligned}$$

3 $\sqrt{x}=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$의 양변을 각각 제곱하면

$$x=\frac{18-8\sqrt{2}}{2}=9-4\sqrt{2}$$

$x-9=-4\sqrt{2}$의 양변을 각각 제곱하면

$(x-9)^2=(-4\sqrt{2})^2$

$x^2-18x+81=32$ $\quad \therefore x^2-18x=-49$

$$\begin{aligned}\therefore 4x-36x^2+2x^3&=2x(2-18x+x^2)\\&=2(9-4\sqrt{2})(2-49)\\&=-94(9-4\sqrt{2})\\&=-846+376\sqrt{2}\end{aligned}$$

4 $x^2+x+1=0$이므로 $x^2=-x-1$

$x^3=-x^2-x=-(x^2+x)=-(-1)=1$

$x^{101}=(x^3)^{33}\times x^2=1\times x^2=x^2$

$x^{100}=(x^3)^{33}\times x=1\times x=x$

$\therefore x^{101}+x^{100}+1=x^2+x+1=0$

핵심 문제 04

38쪽

1 ㄱ　**2** (1) 5　(2) 63　(3) 65　**3** ②

4 ③　**5** ③

1 ㄱ. $(x-4)^3=x^3-3\times x^2\times 4+3x\times 4^2-4^3$

$=x^3-12x^2\underline{+48x}-64$

ㄴ. $(-x-2)^3=(-1)^3(x+2)^3$

$=-(x^3+6x^2+12x+8)$

$=-x^3-6x^2\underline{-12x}-8$

ㄷ. $(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2(xy-3x-3y)$

$=x^2+y^2+9+2xy\underline{-6x}-6y$

ㄹ. $(2x-y+5)^2=4x^2+y^2+25+2(-2xy+10x-5y)$

$=4x^2+y^2-4xy\underline{+20x}-10y+25$

2 (1) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=9+16=25$

$\therefore\ x+y=5(\because\ x+y>0)$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=3^3+3\times 4\times 3=63$

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=5^3-3\times 4\times 5=65$

3 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}(4+16+16)$

$=18$

4 모든 모서리의 길이의 합이 48 cm이므로

$4(a+b+c)=48$　　$\therefore\ a+b+c=12$

$2(ab+bc+ca)=94$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=12^2-94=50$

5 　$a-b=5$

$+)\ \underline{b-c=-7}$

　$a-c=-2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{5^2+(-7)^2+2^2\}=\frac{1}{2}\times 78=39$

응용 문제 04

39쪽

예제 4 $2-\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ 6,\ 27,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 9,\ -3\,/\,-3$

1 $18\sqrt{3}$　**2** $30\sqrt{3}$　**3** 0　**4** 18

5 (1) 48　(2) 64

1 $\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}}$

$=\left\{\frac{1}{3}(3+\sqrt{3})^3-(3+\sqrt{3})\right\}-\left\{\frac{1}{3}(3-\sqrt{3})^3-(3-\sqrt{3})\right\}$

$=\left\{\frac{1}{3}(27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\right\}$

$-\left\{\frac{1}{3}(27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3})-(3-\sqrt{3})\right\}$

$=\{(18+10\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\}-\{(18-10\sqrt{3})-(3-\sqrt{3})\}$

$=15+9\sqrt{3}-(15-9\sqrt{3})$

$=18\sqrt{3}$

2 $x+\frac{1}{x}=-4$이므로

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(-4)^2-4=12$

$\therefore\ x-\frac{1}{x}=2\sqrt{3}(\because\ -1<x<0)$

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{3})^3+3\times 2\sqrt{3}$

$=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

3 $\frac{y}{x}=t$라 하면 $\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=t^2+\frac{1}{t^2}=1$이므로

$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2=3$

$\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\cdot t\cdot\frac{1}{t}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-3\right\}=0$

4 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$2^2=6+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

이므로

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(-1)^2-2\times(-2)\times 2=9$

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=6^2-2\times 9=36-18=18$

5 (1) $a^2+b^2+c^2=48,\ a+b+c=12$이므로

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$
$$=12^2-48=96$$
$\therefore\ ab+bc+ca=48$

(2) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=48$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이어야 하므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$이다.

$\therefore\ a=b=c$이고 $a+b+c=12$이므로 $a=b=c=4$

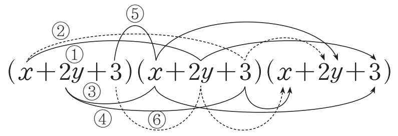
$\therefore\ abc=4\times4\times4=64$

심화 문제

40~45쪽

01 36	**02** 2^{n+2}	**03** 1	**04** $2\sqrt{6}$
05 1	**06** -3	**07** -32	**08** 2, 3, 4
09 $\left(-x^2+3xy-\frac{3}{2}y^2\right)\text{cm}^2$			**10** 5
11 -1	**12** 6	**13** 17	**14** $\frac{1}{3}$, -1
15 16	**16** 0	**17** 민정	**18** 6

01 xy항이 나오는 부분을 전개하면 다음과 같다.



①+②+③+④+⑤+⑥

$=6xy+6xy+6xy+6xy+6xy+6xy=36xy$

따라서 xy의 계수는 36이다.

02 $(a+b)^n=A,\ (a-b)^n=B$라 하면

(주어진 식)$=(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$

$=4(a+b)^n(a-b)^n=4\{(a+b)(a-b)\}^n$

$=4(a^2-b^2)^n=4\times2^n=2^2\times2^n=2^{n+2}$

03 $x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 $x^3+1=0$ $\quad\therefore\ x^3=-1$

$$x^{101}+\frac{1}{x^{101}}=(x^3)^{33}\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}$$
$$=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2$$

$x^2-x+1=0$의 양변에 $\frac{1}{x}$을 곱하면

$x-1+\frac{1}{x}=0$이므로 $x+\frac{1}{x}=1$

$\therefore\ x^{101}+\frac{1}{x^{101}}=-1+2=1$

04 $xy=(2^{100}+1)(5^{97}+1)$

$=2^{100}\times5^{97}+2^{100}+5^{97}+1$

$=2^3\times2^{97}\times5^{97}+2^{100}+5^{97}+1$

$=2^3\times10^{97}+2^{100}+5^{97}+1$

$=8\times10^{97}+2^{100}+5^{97}+1$

따라서 xy는 98자리의 수이다.

$n=98$이고 $9<\sqrt{98}<10$이므로 $x=\sqrt{98}-9$

$(x+9)^2=98,\ x^2+18x+81=98$ $\quad\therefore\ x^2+18x=17$

$\therefore\ \sqrt{5(x+19)(x-1)+34}$

$=\sqrt{5(x^2+18x-19)+34}$

$=\sqrt{5(17-19)+34}$

$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

05 $123456790=x$라 하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{x-1}{x(x+3)-(x+1)^2}$$
$$=\frac{x-1}{x^2+3x-x^2-2x-1}$$
$$=\frac{x-1}{x-1}=1$$

06 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$에서

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=0,$

$abc\neq0$이므로 $a+b+c=0$

$$(\text{주어진 식})=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}$$
$$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}=-3$$

07 $a-c=d-b$에서 $a+b=c+d$

$(a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a-b-c-d)$

$=(c+d+c-d)(a-b+a+b)(c+d-c+d)(a-b-a-b)$

$=2c\cdot2a\cdot2d\cdot(-2b)$

$=-16abcd=-32$

08 연속하는 세 정수를 $x-1,\ x,\ x+1$이라 하면

$(x+1)^2=x(x-1)+10$

$x^2+2x+1=x^2-x+10$

$3x=9$ $\quad\therefore\ x=3$

따라서 연속하는 세 정수는 2, 3, 4이다.

09 $\overline{\text{DG}}=y\,\text{cm},\ \overline{\text{BF}}=\overline{\text{EH}}=\overline{\text{AE}}=x-y\,(\text{cm})$이므로

$\overline{\text{EB}}=\overline{\text{AB}}-\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AB}}-\overline{\text{EH}}$

$=y-(x-y)=2y-x\,(\text{cm})$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=(2y-x)(x-y)+\frac{1}{2}y^2$

$=-2y^2+3xy-x^2+\frac{1}{2}y^2$

$=-x^2+3xy-\frac{3}{2}y^2(\text{cm}^2)$

10 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$에서 $a+b=8$이므로

(i) $(a, b)=(2, 6), (6, 2)$일 때, $x^2+8x+12$

(ii) $(a, b)=(3, 5), (5, 3)$일 때, $x^2+8x+15$

(iii) $(a, b)=(4, 4)$일 때, $x^2+8x+16$

따라서 x의 계수가 8인 다항식이 나올 경우의 수는 5이다.

11 $x+y+z=1$에서 $x+y=1-z$, $y+z=1-x$, $z+x=1-y$ 이므로

(주어진 식)$=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=(1-x-z+zx)(1-y)$

$=1-y-x+xy-z+yz+zx-xyz$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+3-4=-1$

12 $(3x+2y)^{12}=3^{12}x^{12}+\cdots+2^{12}y^{12}$의 계수의 총합은

$x=y=1$일 때의 식의 값과 같다.

$\therefore A=(3\times1+2\times1)^{12}=5^{12}$

같은 방법으로 $B=(3\times1-2\times1)^{12}=1$

$\therefore A^{\frac{1}{12}}+B=(5^{12})^{\frac{1}{12}}+1=6$

13 $a^2+ab+b^2=32 \cdots$ ㉠

$a^2-ab+b^2=22 \cdots$ ㉡

이라 하면

㉠+㉡에서 $2(a^2+b^2)=54$이므로 $a^2+b^2=27$

㉠−㉡에서 $2ab=10$이므로 $ab=5$

$\therefore (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=27-10=17$

14 $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{c+d+a}=\frac{c}{d+a+b}=\frac{d}{a+b+c}=\frac{1}{k}$

이라 하면

$b+c+d=ak \cdots$ ㉠, $c+d+a=bk \cdots$ ㉡

$d+a+b=ck \cdots$ ㉢, $a+b+c=dk \cdots$ ㉣

㉠+㉡+㉢+㉣을 하면

$(k-3)(a+b+c+d)=0$

$3(a+b+c+d)=(a+b+c+d)k$

$\therefore k=3$ 또는 $a+b+c+d=0$

(i) $k=3$일 때, 식의 값은 $\frac{1}{3}$

(ii) $a+b+c+d=0$일 때, $b+c+d=-a$이므로
㉠에 대입하면 $k=-1$이고, 식의 값은 -1

따라서 (i), (ii)에 의해 식의 값은 $\frac{1}{3}$, -1

15 $5=2^3-3$이므로

(좌변)$=(2^3-3)(2^3+3)(2^6+3^2)(2^{12}+3^4)$

$=(2^6-3^2)(2^6+3^2)(2^{12}+3^4)$

$=(2^{12}-3^4)(2^{12}+3^4)$

$=2^{24}-3^8$

$\therefore a-b=24-8=16$

16 $f(y, x, z)+f(z, x, y)=-3$에서

$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=-3$,

$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+1\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+1\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)=0$

$\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}=0$이므로

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$

$x+y+z\neq0$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$에서

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=0$

$\therefore xy+yz+zx=0$

17 $9999^{100}=(10^4-1)^{100}=10^{400}+\cdots$이고,

$999^{200}=(10^3-1)^{200}=10^{600}+\cdots$이므로 999^{200}이 더 크다.

따라서 민정이가 이겼다.

18 $x^3-x^2+ax+b=(x^2+x+3)(x-p)+(x+2)$

가 성립하므로

$x^3-x^2+ax+b-x-2=(x^2+x+3)(x-p)$

$x^3-x^2+(a-1)x+(b-2)$

$=x^3+(1-p)x^2+(3-p)x-3p$

양변의 계수와 상수항을 비교하면

$-1=1-p$, $a-1=3-p$, $b-2=-3p$

$\therefore p=2$, $a=2$, $b=-4$

$\therefore a-b=6$

최상위 문제

46~51쪽

01 5	**02** 3	**03** $\frac{9}{2}$	**04** 3
05 20	**06** 321	**07** -6	**08** 1
09 70	**10** 1	**11** 2660	**12** $12-2\sqrt{7}$
13 1	**14** 701	**15** $\frac{13}{9}$	
16 $e=\frac{bf-af+cd-bd}{c-a}$		**17** -15	**18** 200개

01 $xy=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$

$$\begin{aligned}x^2y^2+2xyz+z^2&=1+2z+z^2\\&=(1+z)^2\\&=(\sqrt{5})^2=5\end{aligned}$$

02 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}&1\cdot(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^{16}-1)(2^{16}+1)\\&=2^{32}-1\end{aligned}$$

2^k-1	2^1-1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1	2^6-1
나머지	1	3	7	4	9	8

2^k-1	2^7-1	2^8-1	2^9-1	$2^{10}-1$	$2^{11}-1$	$2^{12}-1$
나머지	6	2	5	0	1	3

나머지가 1, 3, 7, 4, 9, 8, 6, 2, 5, 0으로 반복됨을 알 수 있다.

따라서 $2^{32}-1$을 11로 나눈 나머지는 3이다.

03 $(x+2y)^2-(x-2y)^2=16$에서

$(x^2+4xy+4y^2)-(x^2-4xy+4y^2)=16$

$8xy=16$이므로 $xy=2$

$(x-5)(y-5)=12$에서 $xy-5(x+y)+25=12$

$2-5(x+y)+25=12$이므로 $x+y=3$

$\therefore\ \frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\frac{9}{2}$

04 $x=1-\sqrt{2}$에서 $x-1=-\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2x+1=2$

$x^2-2x=1\qquad\therefore\ x^2=2x+1$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(1+1)^2(2x+1-x-2)^2-5\times1^2\\&=4(x-1)^2-5\\&=4(-\sqrt{2})^2-5\\&=8-5=3\end{aligned}$$

05 $(y+z)^3=5$이므로 $x^3=5$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^3+3\{(y+z)^3-3yz(y+z)\}+9xyz\\&=x^3+3(x^3-3xyz)+9xyz\\&=x^3+3x^3-9xyz+9xyz\\&=4x^3=20\end{aligned}$$

06 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8=\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{47+21\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12}&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8\\&=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\times\frac{47+21\sqrt{5}}{2}\\&=161+72\sqrt{5}\end{aligned}$$

$160<72\sqrt{5}<161$이므로 $321<161+72\sqrt{5}<322$

따라서 구하는 값은 321이다.

07 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{2}$이므로

$xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=(xy-2x-2y+4)(z-2)\\&=xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8\\&=2(xy+yz+zx)-2(xy+yz+zx)+4\times\frac{1}{2}-8=-6\end{aligned}$$

08 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$1=\frac{1}{3}+2(ab+bc+ca)\qquad\therefore\ ab+bc+ca=\frac{1}{3}$

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

$a+b+c=1$이므로 $a=b=c=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \frac{a}{3bc}=1$

09 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-4=5$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-10=6$

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(ax+by)^2+(bx+ay)^2\\&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2\\&=(a^2+b^2)x^2+4abxy+(a^2+b^2)y^2\\&=5x^2+5y^2+40\\&=5(x^2+y^2)+40=70\end{aligned}$$

10 $abcd=1$이므로

$$\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{1}{bcd+bc+b+1}+\frac{1}{cda+cd+c+1}$$
$$+\frac{1}{dab+da+d+1}$$
$$=\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+bc+b+1}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+c+1}$$
$$+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}+1}$$
$$=\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{1}{\frac{1+abc+ab+a}{a}}$$
$$+\frac{1}{\frac{a+1+abc+ab}{ab}}+\frac{1}{\frac{ab+a+1+abc}{abc}}$$
$$=\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a+1}$$
$$+\frac{ab}{abc+ab+a+1}+\frac{abc}{abc+ab+a+1}$$
$$=\frac{1+a+ab+abc}{abc+ab+a+1}=1$$

11 $(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$에서

$3n^2-3n=n^3-(n-1)^3-1$

$3n^2-3n=3n(n-1)=3f(n)$이므로

$3f(n)=n^3-(n-1)^3-1$

$$\begin{aligned}3S&=3f(1)+3f(2)+3f(3)+\cdots+3f(20)\\&=(1^3-0^3-1)+(2^3-1^3-1)+(3^3-2^3-1)\\&\quad+\cdots+(20^3-19^3-1)\\&=20^3+(-1)\times 20=7980\end{aligned}$$

$\therefore S=2660$

12 $\overline{\mathrm{OC}}=x$, $\overline{\mathrm{OE}}=y$라 하면 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{OD}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{BE}}&=(4-x)+4+(4-y)\\&=12-(x+y)\end{aligned}$$

$xy=6$, $\triangle\mathrm{OCE}$에서 $x^2+y^2=4^2=16$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=28$

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y=2\sqrt{7}$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{BE}}=12-(x+y)=12-2\sqrt{7}$

13 $1+x+x^2+x^3=t$라 하면

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+x^3+x^4)^2\\&=(t+x^4)^2\\&=t^2+2tx^4+x^8\\&=(1+x+x^2+x^3)^2+2(1+x+x^2+x^3)x^4+x^8\end{aligned}$$

여기서 x^3의 계수는 $(1+x+x^2+x^3)^2$에서만 나타나므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore \frac{b}{a}=1$

14 연속하는 네 자연수를 a, $a+1$, $a+2$, $a+3$이라 하면

$$\begin{aligned}&a(a+1)(a+2)(a+3)+1\\&=a(a+3)\{(a+1)(a+2)\}+1\\&=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1\end{aligned}$$

$a^2+3a=A$라 하면

$A(A+2)+1=(A+1)^2=(a^2+3a+1)^2$

$$\begin{aligned}\therefore (25\times26\times27\times28)+1&=(25^2+3\times25+1)^2\\&=701^2\end{aligned}$$

$\therefore N=701$

15 세 수를 a, b, c라 하면

$a+b+c=-2$, $a^2+b^2+c^2=2$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$ab+bc+ca=1$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{3}$이므로

$abc=3$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=\frac{13}{9}\end{aligned}$$

16 $\triangle\mathrm{AGB}\backsim\triangle\mathrm{DGE}$, $\triangle\mathrm{BGC}\backsim\triangle\mathrm{EGF}$이므로

$(b-a):(c-b)=(d-e):(e-f)$

$(b-a)(e-f)=(c-b)(d-e)$

$(b-a)f-(b-a)e=(c-b)e-(c-b)d$

$(c-b)e+(b-a)e=(b-a)f+(c-b)d$

$(c-a)e=bf-af+cd-bd$

$\therefore e=\frac{bf-af+cd-bd}{c-a}$

17 $\square\mathrm{ABCD}=xy$, $\square\mathrm{ABEF}=x^2$

$\square\mathrm{FGHD}=(y-x)^2=y^2-2xy+x^2$

$\overline{\mathrm{GE}}=\overline{\mathrm{FE}}-\overline{\mathrm{FG}}=x-(y-x)=2x-y$이므로

$\square\mathrm{GEMN}=(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{NMCH}&=xy-x^2-(y^2-2xy+x^2)-(4x^2-4xy+y^2)\\&=-6x^2+7xy-2y^2\end{aligned}$$

$a=-6$, $b=7$, $c=-2$이므로 $a-b+c=-15$

18 10 이하의 자연수 중에서 $4^2=16$, $6^2=36$이므로 4와 6의 두 수만이 그 제곱의 십의 자리 숫자가 홀수이다.

p는 0 또는 자연수라고 하면 $1<n<10$인 수 n에 대하여 $(10p+n)^2=100p^2+20pn+n^2$에서 $(100p^2+20pn)$의 부분은 십의 자리 숫자가 반드시 짝수이므로 $(10p+n)^2$의 십의 자리 숫자는 n^2의 십의 자리의 숫자가 홀수일 때만 홀수이다.

따라서 1000 이하의 자연수 중에서 일의 자리 숫자가 4와 6일 때만 답이 될 수 있다.

$\therefore 100\times2=200$(개)

2 인수분해

핵심 문제 01 52쪽

1 $5x+2$ **2** $\sqrt{2}$ **3** $2(b+c)(b-c)$

4 $(x-4)$ m **5** (1) 12가지 (2) 118

1 $6x^2+7x-3=(2x+3)(3x-1)$이므로

$2x+3+3x-1=5x+2$

2 $a+b=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$

$a-b=1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}&=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}\\&=\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

3 $[a,\ -2b,\ -c]+[b,\ 2c,\ a]-[c,\ 4a,\ b]$

$=(a^2-c^2-2abc)+(b^2-a^2-2abc)-(c^2-b^2-4abc)$

$=2b^2-2c^2=2(b+c)(b-c)$

4 (꽃밭의 넓이)$=x^2-4^2=(x+4)(x-4)(\mathrm{m}^2)$

직사각형 모양의 잔디밭의 가로의 길이가 $(x+4)$ m이므로 세로의 길이는 $(x-4)$ m이다.

5 (1)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)}\ \begin{cases}x\\12x\end{cases}\!\!\times & \begin{array}{c:c:c:c}5&-5&1&-1\\-1&1&-5&5\end{array}\\[2ex] \text{(ii)}\ \begin{cases}2x\\6x\end{cases}\!\!\times & \begin{array}{c:c:c:c}5&-5&1&-1\\-1&1&-5&5\end{array}\\[2ex] \text{(iii)}\ \begin{cases}3x\\4x\end{cases}\!\!\times & \begin{array}{c:c:c:c}5&-5&1&-1\\-1&1&-5&5\end{array}\end{array}\right]\ 4\times3=12(\text{가지})$$

(2) $(12x-1)(x+5)=12x^2+59x-5$일 때,

$m=59$(최댓값)

$(12x+1)(x-5)=12x^2-59x-5$일 때,

$m=-59$(최솟값)

$\therefore 59-(-59)=118$

응용 문제 01

53쪽

예제 ① $2a+3b$, $3a-b$, $9b^2$, $2a+3b$, 3, 6, 9/ ㄱ, ㄹ, ㅁ

1 4 **2** 486 **3** 1 **4** 65

5 $\frac{37}{55}$

1 $\sqrt{x}=a-2$의 양변을 제곱하면 $x=(a-2)^2=a^2-4a+4$

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+6a-3}+\sqrt{x-2a+5}\\&=\sqrt{a^2-4a+4+6a-3}+\sqrt{a^2-4a+4-2a+5}\\&=\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}\\&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}\\&=a+1-(a-3)\ (\because a-3<0)\\&=4\end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned}3^{40}-1&=(3^{20}+1)(3^{20}-1)\\&=(3^{20}+1)(3^{10}+1)(3^{10}-1)\\&=(3^{20}+1)(3^{10}+1)(3^5+1)(3^5-1)\end{aligned}$$

자연수 $3^{40}-1$의 약수 중 200과 300 사이의 두 자연수는

$3^5+1=244$와 $3^5-1=242$

따라서 두 자연수의 합은 $244+242=486$

3
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+k\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k\\&=A(A+2)+k \leftarrow x^2+5x+4=A\text{로 치환}\\&=A^2+2A+k\\&=(A+1)^2+k-1\end{aligned}$$

완전제곱식이 되려면 $k-1=0$ $\therefore k=1$

4
$$\begin{aligned}8\times\sqrt{66+\frac{1}{64}}&=8\times\sqrt{64+2+\frac{1}{64}}\\&=8\times\sqrt{8^2+2\times8\times\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2}\\&=8\times\sqrt{\left(8+\frac{1}{8}\right)^2}\\&=8\times\left(8+\frac{1}{8}\right)=65\end{aligned}$$

5 $\dfrac{(2^3-1)}{(2^3+1)}=\dfrac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{3}$

$\dfrac{(3^3-1)}{(3^3+1)}=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{13}{7}$, $\dfrac{(4^3-1)}{(4^3+1)}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{21}{13}$, $\cdots$,

$\dfrac{(9^3-1)}{(9^3+1)}=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{91}{73}$, $\dfrac{(10^3-1)}{(10^3+1)}=\dfrac{9}{11}\times\dfrac{111}{91}$

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\frac{(1\times2\times3\times\cdots\times8\times9)(7\times13\times21\times\cdots\times91\times111)}{(3\times4\times5\times\cdots\times10\times11)(3\times7\times13\times\cdots\times73\times91)}\\&=\frac{1\times2\times111}{10\times11\times3}=\frac{37}{55}\end{aligned}$$

핵심 문제 02

54쪽

1 (1) $(x-1)(x-3)(x+3)$

(2) $(a+b+10)(a-b-10)$

(3) $(x+y+4z)(x-y+4z)$

2 (1) $(a+4)(a-4)(a^2+2)$

(2) $(a-1)(a^2+a+1)(a+2)(a^2-2a+4)$

(3) $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$

3 4 **4** $2\sqrt{5}+6$

5 (1) $(x-2)(y-3)=5$ (2) 4개

1 (1)
$$\begin{aligned}x^3-x^2-9x+9&=x^2(x-1)-9(x-1)\\&=(x-1)(x^2-9)\\&=(x-1)(x-3)(x+3)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}a^2-(b^2+20b+100)&=a^2-(b+10)^2\\&=(a+b+10)(a-b-10)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(x^2+8xz+16z^2)-y^2&=(x+4z)^2-y^2\\&=(x+y+4z)(x-y+4z)\end{aligned}$$

2 (1) a^4-14a^2-32에서 $a^2=t$로 치환하면
$$\begin{aligned}t^2-14t-32&=(t-16)(t+2)\\&=(a^2-16)(a^2+2)\\&=(a+4)(a-4)(a^2+2)\end{aligned}$$

(2) a^6+7a^3-8에서 $a^3=t$로 치환하면
$$\begin{aligned}t^2+7t-8&=(t-1)(t+8)\\&=(a^3-1)(a^3+8)\\&=(a-1)(a^2+a+1)(a+2)(a^2-2a+4)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}x^4+3x^2+4&=x^4+4x^2+4-x^2\\&=(x^2+2)^2-x^2\\&=(x^2-x+2)(x^2+x+2)\end{aligned}$$

3 x, y의 분모를 각각 유리화하면

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}x^4y^4+2x^2y^2+1&=(x^2y^2+1)^2\\&=[\{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}^2+1]^2\\&=(1+1)^2=2^2=4\end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned}x^2-y^2-6x+9&=(x^2-6x+9)-y^2\\&=(x-3)^2-y^2\\&=(x+y-3)(x-y-3)\end{aligned}$$

$(x+y-3)(x-y-3)=11$이므로

$(2\sqrt{5}-3)(x-y-3)=11$

$$x-y-3=\frac{11}{2\sqrt{5}-3}=\frac{11(2\sqrt{5}+3)}{11}=2\sqrt{5}+3$$

$\therefore x-y=2\sqrt{5}+3+3=2\sqrt{5}+6$

5 (1) $xy-3x-2y+1+5=5$

$xy-3x-2y+6=5$

$(\text{좌변})=y(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(y-3)$

$\therefore (x-2)(y-3)=5$

(2)

$x-2$	1	5	-1	-5
$y-3$	5	1	-5	-1

➡

x	3	7	1	-3
y	8	4	-2	2

$\therefore (3,\ 8),\ (7,\ 4),\ (1,\ -2),\ (-3,\ 2)$의 4개

응용 문제 02

55쪽

예제 2 $x^2,\ x^2,\ 2x^2,\ x^2-x+1,\ x^2-x+1$

/ $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x-1)$

1 ① **2** $(x-2y+3)(x+2y+3)$ **3** 1080

4 (1) $-4y^2+8$ (2) $(y-1)(y+1)(17y^2-18)$ (3) 5

1 $n^4+n^2+1=(n^4+2n^2+1)-n^2$

$=(n^2+1)^2-n^2$

$=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$

따라서 n^4+n^2+1이 소수가 되려면

$n^2+n+1=1$ 또는 $n^2-n+1=1$

(i) $n^2+n+1=1$에서 $n=0$ 또는 $n=-1$

➡ n이 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

(ii) $n^2-n+1=1$에서 $n=0$ 또는 $n=1$

$\therefore n=1$ ($\because n$은 자연수)

$n=1$을 대입하면 $p=3$

$\therefore n+p=1+3=4$

2 $x^2-4y^2+bx+9=(x+ay+3)(x+cy+3)$이라 하면

$(\text{우변})=x^2+axy+3x+cxy+acy^2+3cy+3x+3ay+9$

$=x^2+acy^2+6x+(a+c)xy+(3c+3a)y+9$

x의 계수를 비교하면 $b=6$

y^2의 계수를 비교하면 $ac=-4$

xy의 계수를 비교하면 $a+c=0$ $\therefore c=-a$

$ac=-a^2=-4,\ a^2=4$ $\therefore a=-2\ (\because a<0),\ c=2$

$x^2-4y^2+6x+9=(x-2y+3)(x+2y+3)$

3 $(a+2)(b+2)=ab+2(a+b)+4=20$ ⋯ ㉠

㉠에 $ab=-4$를 대입하면 $a+b=10$

한편 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\times(-4)=108$

$\therefore a^3+b^3+a^2b+ab^2=a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2)$

$=10\times108=1080$

4 (1) ㉠−㉡을 하면 $2x^2+8y^2-16=0$

$\therefore x^2=-4y^2+8$

(2) ㈏$=16y^4-64y^2+64+y^4+16y^2-32+3y^2-4$

$=17y^4-45y^2+28$

$=(y^2-1)(17y^2-28)$

$=(y-1)(y+1)(17y^2-18)$

(3) $(y-1)(y+1)(17y^2-18)=0$에서 y는 정수이므로

$y=1$이면 $x^2=-4\times1^2+8=4$

$y=-1$이면 $x^2=-4\times(-1)^2+8=4$

$\therefore x^2=4,\ y^2=1$이므로 $x^2+y^2=5$

핵심 문제 03

56쪽

1 ② **2** -2 **3** $2x-y-3$ **4** 5

5 $-\frac{1}{2}$ **6** 16

1 $xyz-xy+xz-x-yz+y-z+1$

$=x(yz-y+z-1)-(yz-y+z-1)$

$=(x-1)(yz-y+z-1)$

$=(x-1)\{y(z-1)+(z-1)\}$

$=(x-1)(y+1)(z-1)$

2 $(x-2)^2+(x-2)+y(y+3)-2xy$

$=x^2-4x+4+x-2+y^2+3y-2xy$

x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2$

$$\begin{array}{llcr} x & -(y+1) & \rightarrow & -xy-x \\ x & -(y+2) & \rightarrow & +)\ \underline{-xy-2x} \\ & & & -(2xy+3x) \end{array}$$

➡ $(x-y-1)(x-y-2)$

$\therefore a=-1,\ b=-1,\ c=-2$이므로 $a-b+c=-2$

3 $x^2-xy-6y^2-3x+9y$

$=(x-3y)(x+2y)-3(x-3y)$

$=(x-3y)(x+2y-3)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-3y)+(x+2y-3)=2x-y-3$

4 $4x^2+4xy-4x-(2y-y^2-1)$

$=4x^2+4(y-1)x+y^2-2y+1$

$=(2x)^2+2\cdot2\cdot(y-1)x+(y-1)^2$

$=(2x+y-1)^2$

$a=2$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=5$

5 (주어진 식)$=\dfrac{x+y+1}{(x+y)(x+2y)+(x+2y)}$

$=\dfrac{x+y+1}{(x+y+1)(x+2y)}=\dfrac{1}{x+2y}$

$=\dfrac{1}{4-2\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-3)}=-\dfrac{1}{2}$

6 $f(a,\ b,\ c)=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$

$=(a^2+b^2+2ab)-2(a+b)c+c^2$

$=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$

$=(a+b-c)^2$

$f(132,\ 128,\ 256)=(132+128-256)^2=16$

응용문제 03

57쪽

예제 3 $xy,\ xy,\ z,\ 2,\ yz,\ xy,\ 0,\ 1\ /\ 1$

1 $(a+b)(b+c)(c+a)$ **2** ④ **3** -64

4 $(x+y+z)(xy+yz+zx)$ **5** ③

1 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

$=\underline{(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)}$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$ → a에 관한 내림차순

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

2 $2x^2-2y^2+3xy+4x+3y+2$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(3y+4)x-(2y^2-3y-2)$

$=2x^2+(3y+4)x-(2y+1)(y-2)$

$$\begin{array}{llll} x & (2y+1) & \to & 4xy+2x \\ 2x & -(y-2) & \to & +)\ -xy+2x \\ \hline & & & 3xy+4x \end{array}$$

➡ $(x+2y+1)(2x-y+2)$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=2,\ d=-1$이므로 $a+b+c-d=6$

3 $a^2-4ab+4b^2-(9c^2+6c+1)$

$=(a-2b)^2-(3c+1)^2$

$=(a-2b+3c+1)(a-2b-3c-1)$ ⋯ ㉠

이때 $(a-2b)^2=(a+2b)^2-8ab=4+32=36$

$\therefore\ a-2b=6$ ($\because\ a-2b>0$)

㉠에 $a-2b=6$, $c=3$을 대입하면

$(6+9+1)\times(6-9-1)=16\times(-4)=-64$

4 $x+y+z=A$라 하면

$xyz+(x+y)(y+z)(z+x)$

$=xyz+(A-z)(A-x)(A-y)$

$=xyz+A^3-(x+y+z)A^2+(xy+yz+zx)A-xyz$

$=A^3-A^3+(xy+yz+zx)A$ ($\because\ x+y+z=A$)

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

5 $a^4-b^4+(a-b)c^3-(a^2-b^2)c^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)c=0$

$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)+(a-b)c^3$

$\qquad-(a+b)(a-b)c^2-(a^2+b^2)(a-b)c=0$

$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)+c(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b-c)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때 $a\neq b$, $a+b>c$이므로 $a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$

심화문제

58~63쪽

01 $30\sqrt{2}$ **02** 10개 **03** $\dfrac{22}{25}$ **04** 95

05 2 **06** 15 **07** -169 **08** 3

09 $ab-3c$ **10** 12 **11** 20 **12** 9개

13 정삼각형 **14** 192 **15** 5, 9, 29, 69

16 3 **17** $(x+y)(y+z)(z+x)$ **18** 210

01 (주어진 식)$=(x^3+x^2y)+(xy^2+y^3)$

$=x^2(x+y)+y^2(x+y)$

$=(x+y)(x^2+y^2)$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=18$

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=3\sqrt{2}\times10=30\sqrt{2}$

02 $x^2-4ax+5b+6ax-b=x^2+2ax+4b$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$$4b=\left(\frac{2a}{2}\right)^2=a^2$$

따라서 100 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(2, 1)$, $(4, 4)$, $(6, 9)$, $(8, 16)$, $(10, 25)$, $(12, 36)$, $(14, 49)$, $(16, 64)$, $(18, 81)$, $(20, 100)$의 10개이다.

03 $f(5)\times f(6)\times f(7)\times\cdots\times f(10)$

$$=\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\times$$

$$\cdots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{11}{10}=\frac{22}{25}$$

04 $n^3+25=n^3+5^3-100$

$$=(n+5)(n^2-5n+25)-100$$

n^3+25가 $n+5$의 배수가 되려면 100이 $n+5$의 배수가 되어야 한다.

즉, 100이 $n+5$로 나누어떨어져야 한다.

따라서 가장 큰 자연수 n은 $100-5=95$이다.

05 $100=a$라 하면

$$\frac{1}{a(a+2)}+1=\frac{a^2+2a+1}{a(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{a(a+2)}\text{이므로}$$

$$(\text{주어진 식})=\frac{(a+1)^2}{a(a+2)}\times\frac{a^2}{(a-1)(a+1)}$$

$$\times\frac{(a-1)^2}{(a-2)a}\times\frac{(a-2)^2}{(a-3)(a-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a-2)}{(a+2)(a-3)}$$

$$=\frac{101\times98}{102\times97}=\frac{4949}{4947}$$

$\therefore 4949-4947=2$

06 $6a^2+19a+15=(3a+5)(2a+3)$

$12a^2+23a+5=(3a+5)(4a+1)$

$\therefore$ (세로의 길이)$=3a+5$,

(가로의 길이)$=2a+3+4a+1=6a+4$

$\therefore k=5$, $p=6$, $q=4$이므로 $k+p+q=15$

07 $x^2+mx+12=x^2+(a+b)x+ab$에서 $a+b=m$, $ab=12$이므로 $ab=12$인 (a, b)의 순서쌍은
$(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$, $(-1, -12)$, $(-2, -6)$, $(-3, -4)$, $(-4, -3)$, $(-6, -2)$, $(-12, -1)$이다.

m의 최댓값은 13, m의 최솟값은 -13

$\therefore 13\times(-13)=-169$

08 $a-b=-1$, $b-c=-1$의 두 식을 더하면 $c-a=2$이므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(1+1+4)=3$$

09 $x+y+z=a$에서 $y+z=a-x$, $z+x=a-y$, $x+y=a-z$이므로

$$(\text{주어진 식})=yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)$$

$$=yz(a-x)+zx(a-y)+xy(a-z)$$

$$=a(xy+yz+zx)-3xyz$$

$$=ab-3c$$

10 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$이므로 $x+\frac{1}{x}=5$

$$(\text{주어진 식})=x^2\left(x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}$$

$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}$$

$$=x^2(5^2-2-3\times5+4)=12x^2$$

$\therefore a=12$

11 $(a+b)^3=A$, $(a-b)^3=B$라 하면

$$(\text{주어진 식})=(A+B)^2-(A-B)^2$$

$$=4AB=4(a+b)^3(a-b)^3$$

$$=4(a^2-b^2)^3=2^8\times5^3$$

$(a^2-b^2)^3=2^6\times5^3$이므로 $(a^2-b^2)^3=(2^2\times5)^3$

$\therefore a^2-b^2=2^2\times5=20$

12 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이고,

주어진 이차식에서 $a+b=-1$이므로

ab의 절댓값은 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타난다.

즉, $1\cdot2$, $2\cdot3$, $3\cdot4$, $4\cdot5$, $5\cdot6$, $6\cdot7$, $7\cdot8$, $8\cdot9$, $9\cdot10$

따라서 $(x+a)(x+b)$의 꼴로 인수분해되는 이차식은 9개이다.

13 $<a, b, c>+<b, c, a>+<c, a, b>=0$에서

$$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)$$

$$=a^2-ac-ab+bc+b^2-ab-bc+ac+c^2-bc-ac+ab$$

$$=a^2+b^2+c^2-ac-ab-bc$$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \qquad \therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

14 $x=\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{3-4}=-(7-4\sqrt{3})=-7+4\sqrt{3}$

$y=\frac{(\sqrt{3}+2)^2}{3-4}=-(7+4\sqrt{3})=-7-4\sqrt{3}$

$x+y=-14,\ xy=49-48=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)+14xy}{x+y}$

$=\frac{(-14)^3-3\times1\times(-14)+14\times1}{-14}$

$=14^2-3-1$

$=192$

15 $\frac{n^2+6n+25}{n+11}=\frac{(n+11)(n-5)+80}{n+11}=n-5+\frac{80}{n+11}$

이 자연수이므로 $n+11$은 80의 약수이다. (단, $n+11\geq12$)

따라서 $n+11=16,\ 20,\ 40,\ 80$이므로 $n=5,\ 9,\ 29,\ 69$이다.

16 (주어진 식)$=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-3\{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-3(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-3(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=3$

17 $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$

$=x(y^2+2yz+z^2)+y(z^2+2zx+x^2)$
$\qquad +z(x^2+2xy+y^2)-4xyz$

$=xy^2+2xyz+xz^2+yz^2+2xyz+x^2y$
$\qquad +x^2z+2xyz+y^2z-4xyz$

$=xy^2+xz^2+yz^2+x^2y+x^2z+y^2z+2xyz$

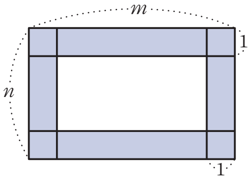
$=(x^2y+x^2z)+(xy^2+2xyz+xz^2)+y^2z+yz^2$

$=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+(y+z)yz$

$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x+z)=(x+y)(y+z)(z+x)$

18 직사각형의 가로의 길이를 m, 세로의 길이를 n이라 하자. $(m>n)$



직사각형의 가장자리에 놓인 색종이의 넓이는 전체 색종이 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

$2m+2n-4=\frac{1}{3}mn$

양변에 3을 곱하고 정리하면 $mn-6m-6n+12=0$

$(m-6)(n-6)-24=0$

$(m-6)(n-6)=24 \cdots$ ㉠

㉠을 만족하는 $m,\ n$은 다음 표와 같다.

$m-6$	$n-6$
24	1
12	2
8	3
6	4

➡

m	n	mn
30	7	210
18	8	144
14	9	126
12	10	120

따라서 가장 큰 넓이는 210이다.

최상위 문제

64~69쪽

01 $-4,\ 2$ **02** $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ **03** 4049개

04 $b<a<c$ **05** $\frac{b(2a+b)}{4}\pi$ **06** 267

07 $k=1,\ x+y+z=0$ **08** -3 **09** 7, 14

10 $\frac{9}{8}$ **11** $(3,\ 7)$ **12** 10가지 **13** 1

14 $-51+27\sqrt{5}$ **15** 풀이 참조 **16** 1

17 25 **18** 24

01 $x^2+2x+8=k^2$(k는 정수)라 하면 $(x+1)^2+7=k^2$

$k^2-(x+1)^2=7$이므로 $(k+x+1)(k-x-1)=7$

$k,\ x$는 모두 정수이므로 $k+x+1,\ k-x-1$의 값은 다음 표와 같다.

	①	②	③	④
$k+x+1$	1	-1	7	-7
$k-x-1$	7	-7	1	-1

각각을 연립하여 풀면 ①, ④에서 $x=-4$

②, ③에서 $x=2$

02 (주어진 식)

$=(a^3+b^3+c^3-3abc)+\{abc+bc(b+c)\}$
$\qquad +\{abc+ca(c+a)\}+\{abc+ab(a+b)\}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\qquad +bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+bc+ca+ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

03 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$$+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}$$

$$+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

$2023\le\sqrt{n+1}-1<2024$, $2024\le\sqrt{n+1}<2025$

$\therefore\ 2024^2-1\le n<2025^2-1$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$(2025^2-1)-(2024^2-1)=(2025+2024)(2025-2024)$

$=4049$(개)

04 $a^2-a-2b-2c=0$ ⋯ ㉠

$a+2b-2c+3=0$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $4c=a^2+3$

양쪽에 $-4a$를 더하여 인수분해하면

$4c-4a=a^2-4a+3$이므로

$4(c-a)=(a-3)(a-1)$ ⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $a^2-2a-3=4b$ ⋯ ㉣

$b>0$이므로 $a^2-2a-3>0$, $(a-3)(a+1)>0$에서

$a+1>0$이므로 $a>3$

㉢에서 $4(c-a)>0$이므로 $a<c$

㉣의 양변에 $-4a$를 더하여 식을 변형하면

$4(b-a)=a^2-2a-3-4a$

$=a^2-6a-3$

$=(a-3)^2-12<0$

이므로 $b<a$

$\therefore\ b<a<c$

05 색칠한 부분의 넓이는 지름의 길이가 $a+b$인 원의 넓이에서 지름의 길이가 a인 원의 넓이를 빼면 된다.

(색칠한 부분의 넓이)$=\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$=\pi\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a}{2}\right)$

$=\pi\left(\frac{b}{2}\times\frac{2a+b}{2}\right)=\frac{b(2a+b)}{4}\pi$

06 (나)와 (다)에서

$ab+a+b+1=(a+1)(b+1)=195=13\times15$

$bc+b+c+1=(b+1)(c+1)=255=15\times17$

이므로 $b+1=15$이다.

그러므로 $b=14$, $a=12$, $c=16$이다.

$\therefore\ d=\frac{2^7\times3^3\times5^2\times7}{abc}=\frac{2^7\times3^3\times5^2\times7}{2^7\times3\times7}=3^2\times5^2=225$

$\therefore\ a+b+c+d=267$

07 $x^2-kyz=y^2-kzx$에서 $(x-y)(x+y)+kz(x-y)=0$

이므로 $(x-y)(x+y+kz)=0$

$x-y\ne0$이므로 $x+y+kz=0$ ⋯ ㉠

같은 방법으로 $y^2-kzx=z^2-kxy$에서

$(y-z)(y+z+kx)=0$

$y-z\ne0$이므로 $y+z+kx=0$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $x-z+k(z-x)=0$이므로

$(x-z)(1-k)=0$

$x-z\ne0$이므로 $k=1$

따라서 $k=1$을 ㉠에 대입하면 $x+y+z=0$

08 $x^2+3y^2+z^2+3yz-zx-3xy=0$에서

$x^2-(3y+z)x+3y^2+3yz+z^2=0$이고

$\left(x-\frac{3y+z}{2}\right)^2-\frac{(3y+z)^2}{4}+3y^2+3yz+z^2=0$

양변에 4를 곱하여 정리하면 $(2x-3y-z)^2+3(y+z)^2=0$

이므로 $2x-3y-z=0$, $y+z=0$이고,

두 식을 연립하여 풀면 $x=-z$, $y=-z$

$\therefore\ \frac{3x^2-y^2+4z^2}{2yz+zx+xy}=-\frac{6z^2}{2z^2}=-3$

09 $n+2$명이 서로 가위바위보를 한 총 횟수는

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$번

한 번의 게임에서 서로 얻는 점수의 합이 1점이므로 $n+2$명의 점수의 총합도 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

갑과 을을 제외한 n명이 받은 점수를 각각 k점이라 하면

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-8=nk$에서 $n(n-2k+3)=14=2\times7$

$(n,\ k)=(1,\ -5)$, $(2,\ -1)$, $(7,\ 4)$, $(14,\ 8)$

$\therefore\ k>0$이므로 $n=7$ 또는 $n=14$

10 x^3-4x^2+2x+1을 $2x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $x^3-4x^2+2x+1-R$는 $(2x-1)$을 인수로 가지므로

$x^3-4x^2+2x+1-R=(2x-1)Q(x)$

양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1-R=\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore\ R=\frac{9}{8}$

11 $6x^2-xy-y^2+20x-44=0$에서 x에 대하여 내림차순을 하면

$6x^2+(20-y)x-y^2=44$

x의 일차항의 계수가 $(20-y)$이므로 인수분해가 되도록

양변에 16을 더하면 $6x^2+(20-y)x-(y^2-16)=60$

$6x^2+(20-y)x-(y+4)(y-4)=60$

$(2x-y+4)(3x+y+4)=60$

x, y가 양의 정수이므로 $3x+y+4\geq 8$

60의 약수 중 8보다 큰 것은 10, 12, 15, 20, 30, 60이므로

	①	②	③	④	⑤	⑥
$3x+y+4$	10	12	15	20	30	60
$2x-y+4$	6	5	4	3	2	1

각 경우를 연립하여 풀면

①일 때 $x=\frac{8}{5}$, $y=\frac{6}{5}$, ②일 때 $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{13}{5}$

③일 때 $x=\frac{11}{5}$, $y=\frac{22}{5}$, ④일 때 $x=3$, $y=7$

⑤일 때 $x=\frac{24}{5}$, $y=\frac{58}{5}$, ⑥일 때 $x=\frac{53}{5}$, $y=\frac{121}{5}$

따라서 조건에 맞는 순서쌍은 $(x,\ y)=(3,\ 7)$이다.

12 $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

에서 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}$, $b^2=2^2ac$이므로 b는 짝수이다.

(i) $b=2$일 때, $ac=1$이므로 $(a,\ c)=(1,\ 1)$

(ii) $b=4$일 때, $ac=4$이므로

$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

(iii) $b=6$일 때, $ac=9$이므로

$(a,\ c)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$

(iv) $b=8$일 때, $ac=16$이므로

$(a,\ c)=(2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2)$

따라서 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되는 경우의 수는 10가지이다.

13 $k\neq 0$이므로 $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$

$a(1-b)=k$ ⋯ ㉠, $b(1-c)=k$ ⋯ ㉡,

$c(1-a)k$ ⋯ ㉢

㉠에서 $b=1-\frac{k}{a}$, ㉢에서 $c=\frac{k}{1-a}$이므로 ㉡에 대입하면

$\left(1-\frac{k}{a}\right)\left(1-\frac{k}{1-a}\right)=k$에서

$k^2+(a^2-a-1)k-(a^2-a)=0$이고

좌변을 인수분해하면 $(k-1)(a^2-a+k)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=a-a^2$

$k=a-a^2$을 ①에 대입하면 $a=b$이므로 $a^2-a+k\neq 0$

$\therefore k=1$

14 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고 $3<\sqrt{12}<4$이므로 $a=3$

$2<\sqrt{5}<3$이므로 $b=\sqrt{5}-2$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{a^4-a^3b-11a^2b^2+9ab^3+18b^4}{(a-3b)(a+b)}\\&=\frac{4^4-11a^2b^2+18b^4-a^3b+9ab^3}{(a-3b)(a+b)}\\&=\frac{(a^2-2b^2)(a^2-9b^2)-ab(a^2-9b^2)}{(a-3b)(a+b)}\\&=\frac{(a^2-9b^2)(a^2-ab-2b^2)}{(a-3b)(a+b)}\\&=\frac{(a+3b)(a-3b)(a+b)(a-2b)}{(a-3b)(a+b)}\\&=(a+3b)(a-2b)\\&=\{3+3(\sqrt{5}-2)\}\{3-2(\sqrt{5}-2)\}\\&=(-3+3\sqrt{5})(7-2\sqrt{5})\\&=-51+27\sqrt{5}\end{aligned}$$

15 $x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_{30}+y_{30}=29$,

$x_1+x_2+\cdots+x_{30}=y_1+y_2+\cdots+y_{30}$

$$\begin{aligned}&({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{30}}^2)-({y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_{30}}^2)\\&=({x_1}^2-{y_1}^2)+({x_2}^2-{y_2}^2)+\cdots+({x_{30}}^2-{y_{30}}^2)\\&=(x_1+y_1)(x_1-y_1)+(x_2+y_2)(x_2-y_2)+\cdots\\&\qquad\qquad+(x_{30}+y_{30})(x_{30}-y_{30})\\&=29\{(x_1+x_2+\cdots+x_{30})-(y_1+y_2+\cdots+y_{30})\}=0\end{aligned}$$

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{30}}^2={y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_{30}}^2$

16 $x-1=a^2$, $y-2=b^2$, $z-3=c^2$이라고 할 때, 주어진 식은

$a^2+1+b^2+2+c^2+3+8=2(a+2b+3c)$

$a^2-2a+1+b^2-2\cdot 2b+4+c^2-2\cdot 3c+9=0$

$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=0$이므로

$a=1$, $b=2$, $c=3$

따라서 $x=2$, $y=6$, $z=12$이므로 $\frac{xy}{z}=1$

17 $x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+5=0$

조건 ㈎에 의해서

➡ $x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+x+y+z=0$

➡ $x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$

➡ $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x^2+y^2+z^2)=0$

➡ $\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)(x^2+y^2+z^2)=0$

$xyz\neq 0$이므로 $x^2+y^2+z^2\neq 0$

따라서 $xy+yz+zx=0$이다.

이 값을 아래의 인수분해공식에 대입하면

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$

➡ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

➡ $x^2+y^2+z^2=25$

18 $(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$

$a=-(p+q)$, $6a=pq$이므로

$pq=-6(p+q)$

$pq+6(p+q)=0$, $(p+6)(q+6)=36$

$p\geq q$이라 하면

$(p+6, q+6)$	(p, q)	$a=-(p+q)$
$(36, 1)$	$(30, -5)$	-25
$(18, 2)$	$(12, -4)$	-8
$(12, 3)$	$(6, -3)$	-3
$(9, 4)$	$(3, -2)$	-1
$(6, 6)$	$(0, 0)$	0
$(-6, -6)$	$(-12, -12)$	24
$(-4, -9)$	$(-10, -15)$	25
$(-3, -12)$	$(-9, -18)$	27
$(-2, -18)$	$(-8, -24)$	32
$(-1, -36)$	$(-7, -42)$	49

따라서 a의 최댓값은 49이고, 최솟값은 -25이므로 두 수의 합은 24이다.

특목고 / 경시대회 실전문제

70~72쪽

01 $a=8$, $b=7$, $c=4$ **02** 64 **03** 7 cm^2

04 8192 **05** 66개 **06** 100 **07** $a:b$

08 813 **09** 1개

01 $(aa)^2=bbcc$이므로 전개식으로 나타내면

$(10a+a)^2=10^3b+10^2b+10c+c$

$(10+1)^2a^2=10^2(10+1)b+(10+1)c$에서

$a^2=\dfrac{100b+c}{11}=9b+\dfrac{b+c}{11}$

a, b, c는 10보다 작은 자연수이고, $b+c$는 11의 배수가 되어야 하므로 $b+c=11$

$a^2=9b+1$에서 $b=\dfrac{1}{9}(a+1)(a-1)$

b는 자연수이고 $0<a<10$이므로 $a+1=9$

$\therefore a=8$, $b=7$, $c=4$

02 $\sqrt{n+10\sqrt{n}}=k$(k는 자연수)이면 $n+10\sqrt{n}=k^2$이므로

$\sqrt{n}$도 자연수이다.

또, $\sqrt{n}=a$로 놓으면 $a^2+10a=k^2$이다.

그런데 $a^2<a^2+10a<(a+5)^2$이므로

$k=a+1$, $k=a+2$, $k=a+3$, $k=a+4$이다.

(i) $k=a+1$일 때

$a^2+10a=(a+1)^2=a^2+2a+1$이므로

$a=\dfrac{1}{8}$이고, $n=\dfrac{1}{64}$이다.

(ii) $k=a+2$일 때

$a^2+10a=(a+2)^2=a^2+4a+4$이므로

$a=\dfrac{2}{3}$이고, $n=\dfrac{4}{9}$이다.

(iii) $k=a+3$일 때

$a^2+10a=(a+3)^2=a^2+6a+9$이므로

$a=\dfrac{9}{4}$이고, $n=\dfrac{81}{16}$이다.

(iv) $k=a+4$일 때

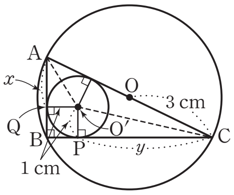
$a^2+10a=(a+4)^2=a^2+8a+16$이므로

$a=8$이고, $n=64$이다.

따라서 $\sqrt{n+10\sqrt{n}}$이 자연수가 되는 자연수 n은 64뿐이다.

03 오른쪽 그림에서 $\overline{\text{CP}}=y$,

$\overline{\text{AQ}}=x$라 하면



($\triangle$ABC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}(x+1)(y+1)$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times(6+y+1+x+1)$ ⋯ ㉠

또, $\triangle$ABC가 직각삼각형이므로

$(x+1)^2+(y+1)^2=(3+3)^2$ ⋯ ㉡

㉠에서 $xy+x+y+1=x+y+8$이므로 $xy=7$이다.

㉡에서 $x^2+y^2+2(x+y)=34$ ⋯ ㉢

그런데 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

여기에 ㉢을 대입하면

$(x+y)^2=34-2(x+y)+2\times7$

$x+y=t$라 하면 $t^2+2t-48=0$에서 $t=6(\because t>0)$

따라서 $x+y=6$

㉠에서 (넓이)$=\dfrac{1}{2}(xy+x+y+1)$

$=\dfrac{1}{2}(7+6+1)=7(\text{cm}^2)$

04 $\{(1+a)(1+2a^5)(1+4a^{25})(1+8a^{125})(1+16a^{625})\}^2$

$=(1+a)^2(1+2a^5)^2(1+4a^{25})^2(1+8a^{125})^2(1+16a^{625})^2$

$=(1+2a+a^2)(1+4a^5+4a^{10})(1+8a^{25}+16a^{50})$

$(1+16a^{125}+64a^{250})(1+32a^{625}+256a^{1250})$

이 식을 전개하면 각 항의 a의 지수는 모두 다르게 나타난다.

각 다항식에서 하나의 항을 꺼내어 곱했을 때, a의 지수가 306인 것을 찾는다.

$250+50+5+1=306$이므로 a^{306}의 계수는

$2\times4\times16\times64\times1=2^{13}=8192$이다.

05 주어진 식의 양변을 제곱하면

$4m^2n=n^2(4m+3n)$, $4m^2=4mn+3n^2$

$4m^2-4mn-3n^2=0$, $(2m-3n)(2m+n)=0$

$2m+n\neq0$이므로 $2m-3n=0$ $\quad\therefore n=\dfrac{2}{3}m$

따라서 $\left(m, \dfrac{2}{3}m\right)$ 꼴의 순서쌍은 주어진 방정식의 해이므로

200보다 작은 자연수로 이루어진 것은 모두 66개이다.

06 세 자리 자연수 중에서 가장 작은 것은 100이므로 $11^{10}-1$이 100의 배수인지 확인해 보면

$$\begin{aligned}11^{10}-1&=(11^5-1)(11^5+1)\\&=(11-1)(11^4+11^3+11^2+11+1)(11^5+1)\end{aligned}$$

위 식에서 $11-1=10$이고, 11^4, 11^3, 11^2, 11, 1의 일의 자리는 모두 1이므로 $11^4+11^3+11^2+11+1=10k+5$(단, k는 자연수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $11^4+11^3+11^2+11+1$은 5의 배수이고, 11^5+1은 짝수이므로 $(11^4+11^3+11^2+11+1)(11^3+1)$은 10의 배수이다.

그러므로 $11^{10}-1$은 100의 배수임을 알 수 있다.

따라서 $11^{10}-1$의 약수 중 가장 작은 세 자리 자연수는 100이다.

07

$$\begin{aligned}(A\text{의 넓이})&=\frac{(a+b)^2\pi}{2}+\frac{a^2\pi}{2}-\frac{b^2\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\{(a+b)^2+a^2-b^2\}\\&=\frac{\pi}{2}(2a^2+2ab)=a(a+b)\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B\text{의 넓이})&=\frac{(a+b)^2\pi}{2}+\frac{b^2\pi}{2}-\frac{a^2\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\{(a+b)^2+b^2-a^2\}\\&=\frac{\pi}{2}(2ab+2b^2)=b(a+b)\pi\end{aligned}$$

따라서

$(A$의 넓이$):(B$의 넓이$)=a(a+b)\pi:b(a+b)\pi=a:b$

08 $100a+10b+c$의 최댓값을 구하므로 $a\geq b$라고 할 때 5 이하의 소수는 2, 3, 5이므로 각 경우에 대하여 알아보면

(i) $c=2$인 경우

$3(a+1)(b+1)=6ab$, $(a+1)(b+1)=2ab$이므로

$ab-a-b=1$, $(a-1)(b-1)=2$

$(a-1, b-1)=(2, 1)$

$\therefore (a, b)=(3, 2)$

(ii) $c=3$인 경우

$4(a+1)(b+1)=9ab$이므로

$4ab+4a+4b+4=9ab$, $5ab-4a-4b=4$

$25ab-20a-20b=20$, $(5a-4)(5b-4)=36$

$(5a-4, 5b-4)=(6, 6)$ 또는 $(36, 1)$

$\therefore (a, b)=(2, 2)$ 또는 $(8, 1)$

(iii) $c=5$인 경우

$6(a+1)(b+1)=15ab$이므로

$6ab+6a+6b+6=15ab$, $9ab-6a-6b=6$,

$(3a-2)(3b-2)=10$

$(3a-2, 3b-2)=(10, 1)$

$\therefore (a, b)=(4, 1)$

따라서 $a=8$, $b=1$, $c=3$일 때 최댓값을 가지므로

$100a+10b+c=813$이다.

09 $\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{(a+b)^2+12ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$에서

$(a+b)^2+12ab$는 $(a+b)$로 나누어떨어져야 하므로

$12ab$도 $(a+b)$로 나누어떨어져야 한다.

a와 b는 서로소이므로 a와 $a+b$는 서로소, b와 $a+b$도 서로소, ab와 $a+b$도 서로소이다.

따라서 12는 $a+b$로 나누어 떨어지므로

(i) $a+b=2$인 경우 $a=b=1$이므로

$\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{16}{2}=8$ $\quad\therefore k=8$

(ii) $a+b=3$인 경우 $a=2$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=2$이므로

$\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{33}{9}=\dfrac{11}{3}$

(iii) $a+b=4$인 경우 $a=3$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=3$이므로

$\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{52}{28}=\dfrac{13}{7}$

(iv) $a+b=6$인 경우 $a=5$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=5$이므로

$\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{96}{126}=\dfrac{16}{21}$

➡ (ii)~(iv)에서 k가 자연수이어야 하므로 모순

(v) $a+b=12$인 경우

$\dfrac{a^2+14ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{(a+b)^2+12ab}{(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}}$에서

$a+b=12$이고,

$\dfrac{(a+b)^2+12ab}{(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}}=\dfrac{144+12ab}{36(48-ab)}$

이므로 분모는 36의 배수이다.

분모가 36의 배수이면 분자도 36의 배수이어야 하므로

$12ab$는 36의 배수이다. 즉 ab는 3의 배수이어야 한다.

ab와 $a+b$는 서로소이므로 조건에 맞지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1개이다.

III. 이차방정식

1 이차방정식과 그 활용

핵심 문제 01

74쪽

1 $x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}+2$ **2** $x=-\frac{4}{5}$

3 7, 1, −1, −7 **4** ① **5** $a<1$ **6** 8

1 $(\sqrt{5}-2)x^2-2(\sqrt{5}-2)x-\sqrt{5}=0$

양변에 $\sqrt{5}+2$를 곱하면

$x^2-2x-\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)=0$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}-2)=0$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}+2$

2 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $a-2\neq0$ $\therefore a\neq2$

$x=-1$을 이차방정식에 대입하면

$(a-2)=-a^2+4$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$ $\therefore a=-3(\because a\neq2)$

$a=-3$을 이차방정식에 대입하면

$-5x^2=9x+4$, $5x^2+9x+4=0$, $(5x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{4}{5}$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{4}{5}$

3 $x^2+2ax-15=0$의 좌변에서 상수항이 -15가 되도록 두 일차식의 곱으로 인수분해한 경우는

$(x-1)(x+15)=0$, $(x-3)(x+5)=0$,

$(x+3)(x-5)=0$, $(x+1)(x-15)=0$의 4가지이다.

따라서 $2a$의 값이 14, 2, −2, −14이므로

a의 값은 7, 1, −1, −7이다.

4 $3a^2-10ab-8b^2=0$에서 $(3a+2b)(a-4b)=0$

$\therefore a=-\frac{2}{3}b$ 또는 $a=4b$

그런데 $ab>0$에서 a, b는 같은 부호이므로 $a=4b$

따라서 $a=4b$를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{(4b)^2+4b\cdot b+b^2}{(4b)^2-4b\cdot b+b^2}=\frac{21b^2}{13b^2}=\frac{21}{13}$$

5 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{a-1}{3}$이 해를 갖지 않으려면

$\frac{a-1}{3}<0$ $\therefore a<1$

6 $(x^2-4x)^2=9$, $x^2-4x=\pm3$

(i) $x^2-4x=3$, $x^2-4x+4=3+4$, $(x-2)^2=7$

$\therefore x=2\pm\sqrt{7}$

(ii) $x^2-4x=-3$, $x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 $2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}+1+3=8$

응용 문제 01

75쪽

예제 ① $x-y$, 2, −2, −2, −2 / −2

1 $x=4\pm\sqrt{2}$ **2** $\frac{1}{2}$ **3** $(-1+\sqrt{5})$ cm **4** 7개

1 $a\cdot b=ab-a-b-3=(a-1)(b-1)-4$

(좌변)$=(4x-3-2x-4)\cdot(3x-5-2x+2)$

$=(2x-7)\cdot(x-3)$

$=(2x-7-1)(x-3-1)-4$

$=2(x-4)(x-4)-4$

따라서 $2(x-4)(x-4)-4=0$

$2(x-4)^2=4$

$\therefore x=4\pm\sqrt{2}$

2 $4x^2+2x-2=0$에서 $2x^2+x-1=0$, $(x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 $x=4$는 이차방정식 $2x^2-(2a-1)x+a-1=0$의 해이다.

$x=4$를 $2x^2-(2a-1)x+a-1=0$에 대입하면

$32-4(2a-1)+a-1=0$, $-7a=-35$ $\therefore a=5$

$2x^2-9x+4=0$에서 $(2x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=\frac{1}{2}$

3 $\triangle BCA \backsim \triangle FBA$(AA 닮음)

$(x+2):2=2:x$

$x(x+2)=4$

$x^2+2x+1=5$, $(x+1)^2=5$, $x=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AF}=-1+\sqrt{5}(\text{cm})(\because \overline{AF}>0)$

4 주어진 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^2-4(a-b)-3(a-b)^2=0$

$3(a-b)^2+4(a-b)-4=0$ ← $a-b=A$로 치환

$3A^2+4A-4=0$, $(A+2)(3A-2)=0$,

$A=-2$ 또는 $A=\frac{2}{3}$

$\therefore a-b=-2$ ($\because a, b$는 자연수)

따라서 $a-b=-2$를 만족시키는 한 자리의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 7)$, $(6, 8)$, $(7, 9)$이므로 모두 7개이다.

핵심 문제 02

76쪽

1 $\sqrt{2}$ **2** 1 **3** (1) $k\le\frac{7}{5}$ (2) 1 **4** -10

1 $x^2-2x-7=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=1\pm2\sqrt{2}$

이때 양수인 근은 $1+2\sqrt{2}$이다.

$2<2\sqrt{2}<3$이므로 $3<1+2\sqrt{2}<4$

$\therefore a=3,\ b=1+2\sqrt{2}-3=2\sqrt{2}-2$

$\therefore \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$

2 $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}=0$의 양변에 12를 곱하면

$9x^2-6x-10=0$

근의 공식에 의하여 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}}{3}$

이때 양수인 근 t는 $\frac{1+\sqrt{11}}{3}$이다.

$3<\sqrt{11}<4$, $4<1+\sqrt{11}<5$, $\frac{4}{3}<\frac{1+\sqrt{11}}{3}<\frac{5}{3}$

따라서 $1<\frac{1+\sqrt{11}}{3}<2$이므로 $n=1$

3 (1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\ne0)$이 해를 가질 조건은

$b^2-4ac\ge0$

$(-6k)^2-4\times1\times(9k^2+5k-7)\ge0$

$36k^2-36k^2-20k+28\ge0$

$\therefore k\le\frac{7}{5}$

(2) 정수 k의 최댓값은 1이다.

4 중근을 가지려면 $a^2-4(-a+15)=0$

$a^2+4a-60=0$

$(a-6)(a+10)=0$

$a=6$ 또는 $a=-10$

(i) $a=6$일 때 $4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$(중근) ➡ 음수인 중근이 아니므로 $a\ne6$

(ii) $a=-10$일 때 $4x^2+20x+25=0$, $(2x+5)^2=0$

$\therefore x=-\frac{5}{2}$(중근) ➡ 음수인 중근이다.

따라서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 -10이다.

응용 문제 02

77쪽

예제 ② $ab+bc+ca$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, 3, c, ab, $c-a$, c, 정삼각형 / $a=b=c$, △ABC는 정삼각형

1 (1) $(16-x)$ cm (2) $(-8+8\sqrt{3})$ cm **2** ②

3 81 **4** ⑤

1 (1) 작은 정삼각형의 한 변의 길이가 x cm이므로 남은 길이는 $(48-3x)$ cm

따라서 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 $(16-x)$ cm이다.

(2) 두 정삼각형의 넓이의 비가 1 : 3이므로

$x^2:(16-x)^2=1:3$

$(16-x)^2=3x^2$, $x^2+16x-128=0$

$x=-8\pm8\sqrt{3}$

$\therefore x=-8+8\sqrt{3}(\because x>0)$

2 이차방정식이 되어야 하므로 $a-2\ne0$ $\therefore a\ne2$

또, 서로 다른 두 개의 근을 가지려면

$(a+1)^2-(a-2)\times(-3a)>0$이어야 한다.

$a^2+2a+1+3a^2-6a>0$

$4a^2-4a+1=(2a-1)^2>0$

즉, $a\ne2$이고 $a\ne\frac{1}{2}$일 때 주어진 이차방정식은 서로 다른 2개의 근을 갖는다.

3 중근을 가지려면 $(2a)^2-4\times9b=0$

$4a^2=36b$, $a^2=9b$ $\therefore a=3\sqrt{b}$

a는 자연수이므로 b는 제곱수이다. 즉

$b=4^2, 5^2, 6^2, \cdots, 9^2$ ($\because b$는 두 자리의 자연수)

따라서 a의 값이 최대가 되는 b의 값은 81이다.

4 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$4(a+1)^2-8(a^2+4a+3)=-4a^2-24a-20\ge0$

$(a+1)(a+5)\le0$ $\therefore -5\le a\le-1$

그런데 $a=-1$ 또는 $a=-3$인 경우는 주어진 방정식이 이차방정식이 아니므로 $a=-1$와 $a=-3$을 주어진 식에 각각 대

입해보면

(i) $a=-1$일 때, 주어진 식은 $2=0$가 되어 근을 갖지 않는다.

(ii) $a=-3$일 때, 주어진 방정식은 $-4x+2=0$이 되므로

근 $x=\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 만족하는 a의 값의 범위는 $-5\le a<-1$

핵심 문제 03

78쪽

1 3 **2** ④ **3** $-2x^2-6x-4=0$ **4** ② **5** 8

1 다른 한 근은 $-2\sqrt{5}-3$

이차방정식의 해가 $x=-3\pm2\sqrt{5}$이므로

$x+3=\pm2\sqrt{5}$, $(x+3)^2=20$

$x^2+6x-11=0$, $3x^2+18x-33=0$

$3a=18$, $11b=-33$ $\quad\therefore a=6$, $b=-3$

$\therefore a+b=6-3=3$

2 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-3$

④ $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(-3)^2-2\times(-3)}{-3}=-5$

3 $(x-4)(x+a)=b$

$x^2+(a-4)x-4a-b=0$

중근 $x=3$을 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-3)^2=0$

$x^2+(a-4)x-4a-b=x^2-6x+9=0$

$a-4=-6$, $-4a-b=9$에서 $a=-2$, $b=-1$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=-1$을 두 근으로 하고

x^2의 계수가 -2인 이차방정식을 구하면

$-2(x+2)(x+1)=0$ 즉, $-2x^2-6x-4=0$

4 $(\alpha-1)+(\beta-1)=6$이므로 $\alpha+\beta=8$

$(\alpha-1)(\beta-1)=-9$, $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-9$

$\alpha\beta-8+1=-9$ $\quad\therefore \alpha\beta=-2$

$x^2+2ax-3b=0$에서

(두 근의 합)$=\alpha+\beta=-2a=8$ $\quad\therefore a=-4$

(두 근의 곱)$=\alpha\beta=-3b=-2$ $\quad\therefore b=\frac{2}{3}$

$\therefore ab=-4\times\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}$

5 $x^2-6x+9=12$, $x^2-6x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-3$

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6-\frac{6}{3}=4$

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=-3+2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

따라서 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고

x^2의 계수가 3인 이차방정식은 $3\left(x^2-4x-\frac{4}{3}\right)=0$

즉, $3x^2-12x-4=0$

$\therefore a=12$, $b=-4$이므로 $a+b=8$

응용 문제 03

79쪽

예제 ③ $\frac{c}{a}$, $-\frac{b}{c}$, c, c, c, $a-c$, c, c / $a=c$

1 3 **2** -8 **3** $\frac{1}{8}$

4 (1) 2 (2) $a=1$, $b=-2$ (3) $x=1$ 또는 $x=2$

1 $x^2+(a+1)x+2a-2=0$을 인수분해하여 풀면

$(x+2)(x+a-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1-a$

$x^2-(a+4)x+4a=0$을 인수분해하여 풀면

$(x-4)(x-a)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=a$

공통근을 가지기 위해서는 $a=-2$ 또는 $1-a=4$

또는 $1-a=a$를 만족해야 한다.

따라서 $a=-2$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$이므로

$(-2)\times(-3)\times\frac{1}{2}=3$

2 $x^2-(k+2)x+4=0$이 중근을 가지므로

$(k+2)^2-16=0$, $(k+2-4)(k+2+4)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-6$

k의 값이 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로

근과 계수와의 관계에 의해

$-a=2+(-6)$ $\quad\therefore a=4$

$b=2\times(-6)$ $\quad\therefore b=-12$

$\therefore a+b=4+(-12)=-8$

3 $\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}=-4+2=-2$에서

$-\frac{2b}{a}=-2$ $\quad\therefore b=a$

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}=-4\times2=-8$

$b^2-b^2+ac=-8a^2$ $\quad\therefore c=-8a$

$ax^2+ax-8a=0$, $x^2+x-8=0$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-8$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{8}$

4 (1) $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(0)=c=2$

(2) $f(x+2)-f(x)=4x$이므로

$a(x+2)^2+b(x+2)+c-(ax^2+bx+c)$

$=4ax+4a+2b$

$4ax+4a+2b=4x$에서 $4a=4$, $4a+2b=0$이므로

$a=1$, $b=-2$

(3) $f(x)=x^2-2x+2$이다.

$f(x)=x$ 즉, $x^2-2x+2=x$의 해를 구하면

$x^2-3x+2=0$, $(x-2)(x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

핵심 문제 04

80쪽

1 $x=3$ 또는 $x=-3$ **2** $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

3 8개 **4** -44 **5** $p=-25$, $q=156$

1 $x\ge0$일 때, $x^2+x-12=0$

$(x-3)(x+4)=0$, $x=3(\because x\ge0)$

$x<0$일 때, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3(\because x<0)$

2 $0<x<2$이므로

(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$

$3x^2=x+0$, $3x^2-x=0$, $x(3x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ $(\because 0<x<1)$

(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$

$3x^2=x+2$, $3x^2-x-2=0$, $(x-1)(3x+2)=0$

$\therefore x=1$ $(\because 1\le x<2)$

3 $<x>^2+<x>-6=0$

$(<x>-2)(<x>+3)=0$

$\therefore <x>=2$ $(\because <x>$는 자연수)

약수의 개수가 2개인 것은 소수이므로 20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이다.

4 작은 근을 t라 하면 큰 근은 $4t$로 놓는다.

두 근의 차가 12이므로

$4t-t=12$, $3t=12$ $\quad\therefore t=4$

$\therefore$ 두 근은 4와 16이다.

4와 16을 근으로 갖고 x^2의 계수가 -1인 이차방정식은

$-(x-4)(x-16)=0$

$-x^2+20x-64=0$

$\therefore a=20$, $b=-64$이므로 $a+b=-44$

5 연속한 두 자연수를 a, $a+1$이라 하면 두 근의 각각의 제곱의 차가 25이므로

$(a+1)^2-a^2=25$

$2a+1=25$ $\quad\therefore a=12$

따라서 두 근은 12, 13이다.

$(x-12)(x-13)=0$, $x^2-25x+156=0$

$\therefore p=-25$, $q=156$

응용 문제 04

81쪽

예제 4 8, 8, 4, 4, 1, -1, 4, 4, $2\pm\sqrt{3}$, -1, $2\pm\sqrt{3}$

/ $x=-1$(중근) 또는 $x=2\pm\sqrt{3}$

1 $\frac{5}{2}\le x<\frac{7}{2}$ **2** $a=\pm15$, $b=50$

3 3 또는 7 **4** $-\frac{5}{12}$

1 $\left[x+\frac{3}{2}\right]=a$라 하면 $\left[x-\frac{3}{2}\right]=a-3(\because a$는 정수)

$a^2-8(a-3)=8$, $a^2-8a+16=0$, $(a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

$\left[x+\frac{3}{2}\right]=4$에서 $4\le x+\frac{3}{2}<5$

$\therefore \frac{5}{2}\le x<\frac{7}{2}$

2 $x=-2$를 $x^2-23x-b=0$에 대입하면

$4+46-b=0$ $\quad\therefore b=50$

$x^2+ax+50=0$의 두 근이 k, $2k$이어야 하므로

$k\cdot2k=50$, $k^2=25$, $k=\pm5$

$\therefore a=-(k+2k)=\pm15$

3 $x^2-(m-1)x+2m-5=0$에서

$m(x-2)-(x^2+x-5)=0$

$m=\frac{x^2+x-5}{x-2}=\frac{(x-2)(x+3)+1}{x-2}$

$=x+3+\frac{1}{x-2}$

m이 정수이려면 $x-2=\pm1$이어야 하므로

$x=3$ 또는 $x=1$

따라서 $x=1$이면 $m=3$, $x=3$이면 $m=7$

4 $x^2-2kx-1=0$의 두 근은 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=-1$

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=2k+3$에 $\alpha+\beta=2k$를 대입하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+3$, $\alpha\beta+3\alpha-1=0$

$-1+3\alpha-1=0$

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=-\frac{3}{2}$

$\therefore k=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{5}{12}$

핵심 문제 05

82쪽

1 $\frac{5+\sqrt{35}}{2}$ **2** 56 **3** 8초

4 3 cm 또는 6 cm **5** 9 cm

1 $x^2+y^2=30$ ⋯ ㉠

$0\le y<1$, $0\le y^2<1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2=30-y^2$, $29<30-y^2\le30$,

$5^2<29<x^2\le30<6^2$

$\therefore 5<x<6$ $(\because x>0)$

따라서 $y=x-5$

$x^2+(x-5)^2=30$, $2x^2-10x-5=0$

$\therefore x=\frac{5+\sqrt{35}}{2}(\because x>0)$

2 $a=x-4$, $b=x-2$, $c=x$, $d=x+2$라 하면

$bd=(x-2)(x+2)$, $ac=(x-4)x$이다.

$(x-2)(x+2)=2(x-4)x-109$

$x^2-8x-105=0$, $(x-15)(x+7)=0$

$\therefore x=15(\because x>2)$

$\therefore a=11$, $b=13$, $c=15$, $d=17$

따라서 연속하는 네 홀수의 합은 $11+13+15+17=56$

3 $80t-5t^2=240$

$t^2-16t+48=0$, $(t-4)(t-12)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=12$

즉, 4초 또는 12초일 때 공이 지면으로부터 240 m인 지점에 있으므로 240 m 이상인 높이에서 머무는 것은 4초부터 12초까지 8초 동안이다.

4 접어야 하는 길이를 x cm라 하면

$x(18-2x)=36$에서 $2x^2-18x+36=0$

$2(x-3)(x-6)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=6$

따라서 양쪽을 3 cm 또는 6 cm를 접어야 한다.

5 $\overline{\mathrm{BD}}=x$ cm라 하면

$\frac{1}{2}\times12\times12-\left\{\frac{1}{2}\times x^2+\frac{1}{2}\times(12-x)^2\right\}=27$

$x^2-12x+27=0$, $(x-3)(x-9)=0$

$x=9(\because \overline{\mathrm{BD}}>\overline{\mathrm{AD}})$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이는 9 cm이다.

응용 문제 05

83쪽

예제 5 16, 160, 320, 80, 80 / 80 g

1 15번째 항

2 A의 세로의 길이 : $\frac{1}{2}$ m, B의 세로의 길이 : $\frac{3}{2}$ m

3 $3-\sqrt{5}$ **4** A : 15시간, B : 18시간, C : $\frac{45}{2}$시간

1 $a_n=(n-1)(n+1)+n$이므로

$(n-1)(n+1)+n=239$

$n^2+n-1=239$, $n^2+n-240=0$

$(n-15)(n+16)=0$

n은 자연수이므로 $n=15$

2 A의 세로, 가로의 길이를 x m, $2x$ m

B의 세로, 가로의 길이를 $3y$ m, $2y$ m라고 하면

$6x=10y-2$, $3x=5y-1$

$x=\frac{5}{3}y-\frac{1}{3}$ ⋯ ㉠

또한 $2x^2=(3y-1)\times2y$, $2x^2=6y^2-2y$

$x^2=3y^2-y$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{5}{3}y-\frac{1}{3}\right)^2=3y^2-y$

$2y^2+y-1=0$, $(y+1)(2y-1)=0$ $\therefore y=\frac{1}{2}(\because y>0)$

㉠에 $y=\frac{1}{2}$을 대입하면 $x=\frac{1}{2}$

따라서 A의 세로는 $\frac{1}{2}$ m, B의 세로는 $3y=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$(m)

3 직선 AB를 나타내는 일차함수의 식은

$y=\frac{1}{2}x+3$이므로

점 P를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a+3\right)$이라고 하면 (단, $-6<a<0$)

$\square\mathrm{OAPQ}=\frac{1}{2}(-a+6)\left(\frac{1}{2}a+3\right)=-\frac{1}{4}a^2+9$

$-\frac{1}{4}a^2+9=4$에서 $a^2-20=0$　　$\therefore a=\pm2\sqrt{5}$

$-6<a<0$이므로 $a=-2\sqrt{5}$

따라서 구하는 y좌표는 $y=\frac{1}{2}\times(-2\sqrt{5})+3=3-\sqrt{5}$

4 수도꼭지 A, B, C에서 시간당 나오는 물의 양을 각각 x, y, z라 하고, 물탱크의 용량을 1이라 하면

$x+y+z=\frac{1}{6}$ ⋯ ㉠, $x+z=\frac{1}{9}$ ⋯ ㉡, $y+z=\frac{1}{10}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{15}$, $y=\frac{1}{18}$, $z=\frac{2}{45}$

∴ A는 15시간, B는 18시간, C는 $\frac{45}{2}$시간이 걸린다.

심화 문제

84~89쪽

01 $-1,\ 4$　**02** $\sqrt{5},\ -\sqrt{5}$　**03** 89개　**04** 1 또는 5

05 $\frac{1}{36}$　**06** $\frac{5}{2}$　**07** 17　**08** 1

09 $-\frac{27}{4}$　**10** $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

11 $\left(\frac{2+\sqrt{14}}{2},\ \frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt{14}}{2},\ \frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

12 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　**13** $a=1,\ b=-2,\ c=1,\ d=-2$

14 3　**15** $\frac{1}{2}\le M\le1$　**16** $x=7$ 또는 $x=8$

17 90분 후　**18** $1:1$

01 $x^2-(4y-1)x+4y^2-2y-6=0$에서

$x^2-(4y-1)x+2(2y-3)(y+1)=0$

$(x-2y+3)(x-2y-2)=0$ ⋯ ㉠

$x-2y=(a-4\sqrt{3})-2(1-2\sqrt{3})=a-2$이므로

$x-2y=a-2$를 ㉠에 대입하면

$(a-2+3)(a-2-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

02 $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=10$에서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$

$\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$, $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=3$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=9-4=5$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ 또는 $x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$

03 (ⅰ) $x^2+y^2\ge100$인 경우

$x^2+y^2-100=2xy$, $(x-y)^2=100$, $x-y=\pm10$

이때 $x>y$인 경우, $x=y+10$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(11,\ 1)$, $(12,\ 2)$, $(13,\ 3)$, ⋯, $(50,\ 40)$의 40개이고

마찬가지로 $x<y$인 경우에도 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의

개수는 40개이다.　　∴ $40+40=80$(개)

(ⅱ) $x^2+y^2<100$인 경우

$100-x^2-y^2=2xy$, $(x+y)^2=100$

$\therefore x+y=10$($\because$ x, y는 자연수)

이때 $x+y=10$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(9,\ 1)$, $(8,\ 2)$, $(7,\ 3)$, ⋯, $(1,\ 9)$

로 9개이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 89개이다.

04 주어진 이차방정식의 정수인 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-m-1$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta=2m-1$ ⋯ ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $2\alpha+2\beta+\alpha\beta=-3$

$\alpha(\beta+2)+2(\beta+2)=1$

$(\alpha+2)(\beta+2)=1$

(ⅰ) $\alpha+2=1$, $\beta+2=1$인 경우

$\alpha=-1$, $\beta=-1$이므로

㉠에 대입하여 풀면 $m=1$

(ⅱ) $\alpha+2=-1$, $\beta+2=-1$인 경우

$\alpha=-3$, $\beta=-3$이므로

㉠에 대입하여 풀면 $m=5$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 m의 값은 1 또는 5이다.

05 $x^2+ax+b=0$에서 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b=0$

$x=-2$가 중근이 되려면

$\frac{a}{2}=2$, $-\frac{a^2}{4}+b=0$이므로 $a=4$, $b=4$

따라서 주사위를 두 번 던져서 두 눈이 모두 4가 나올

확률은 $\frac{1}{36}$

06 공통근을 $x=p$라 하면

$p^2+2p+a=0$ ⋯ ㉠, $2p^2+ap-1=0$ ⋯ ㉡,
$ap^2-p-2=0$ ⋯ ㉢
㉠에서 $a=-p^2-2p$를 ㉡에 대입하여 정리하면
$p^3+1=0$, $(p+1)(p^2-p+1)=0$
∴ $p^2-p+1>0$이므로 $p=-1$, $a=1$
$x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$이므로 $x=-1$(중근)
$2x^2+x-1=0$에서 $(2x-1)(x+1)=0$이므로
$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$이므로
$x=-1$ 또는 $x=2$
∴ (공통근이 아닌 다른 근의 합)$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

07 $19p+1=a^2$이라 하면 $a^2-1=19p$
$(a+1)(a-1)=19p$
p가 소수이므로
$a+1=19$, $a-1=p$ 또는 $a+1=p$, $a-1=19$
(i) $a+1=19$, $a-1=p$이면 $a=18$, $p=17$
(ii) $a+1=p$, $a-1=19$이면 $a=20$, $p=21$
그런데, 21은 소수가 아니므로 $p\neq21$
∴ $p=17$

08 주어진 연립방정식의 해가 없을 조건은
$\frac{a^2+5a+6}{-6}=\frac{-5}{5}\neq\frac{a-7}{12}$
$a^2+5a+6=6$에서 $a(a+5)=0$이므로 $a=0$ 또는 $a=-5$
$a-7\neq-12$에서 $a\neq-5$
따라서 $a=0$이므로 $a^2+a+1=1$

09 $\begin{vmatrix}3x & -9\\ -x & x^2+x\end{vmatrix}=3x(x^2+x)-(-9)(-x)$이므로
$3x^3+3x^2-9x=3x^3+p$를 정리하면 $3x^2-9x-p=0$
이때 두 근의 곱은 $-\frac{p}{3}=\frac{9}{4}$이므로 $p=-\frac{27}{4}$

10 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$이라 하면 $f(0)=1$이므로 $c=1$
$f(x+1)-f(x)=3x$에서
$a\{(x+1)^2-x^2\}+b\{(x+1)-x\}=3x$
$2ax+(a+b)=3x$이므로 $2a=3$, $a+b=0$
∴ $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$
$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=x$에서 $3x^2-5x+2=0$이므로
$(3x-2)(x-1)=0$
∴ $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

11 $x^3-y^3=23$ ⋯ ㉠, $x^2y-xy^2=5$ ⋯ ㉡라 하면
㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $(x-y)^3=2^3$이므로 $y=x-2$ ⋯ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면 $2x^2-4x-5=0$
∴ $x=\frac{2+\sqrt{14}}{2}$, $y=\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$
또는 $x=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$, $y=\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$

12 $1<x<2$이므로 $1<x^2<4$
(i) $1<x^2<2$일 때
$1<x<\sqrt{2}$이므로 $[x]=1$, $[x^2]=1$
$x-1=x^2-1$
$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$
∴ $x=0$ 또는 $x=1$ ➡ 해가 없다.
(ii) $2\le x^2<3$일 때
$\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$이므로 $[x]=1$, $[x^2]=2$
$x-1=x^2-2$, $x^2-x-1=0$
∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ➡ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(iii) $3\le x^2<4$일 때
$\sqrt{3}\le x<2$이므로 $[x]=1$, $[x^2]=3$
$x-1=x^2-3$, $x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
∴ $x=-1$ 또는 $x=2$ ➡ 해가 없다.
따라서 (i)~(iii)에 의해 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

13 $x^2+cx+d=0$에서 $a+b=-c$ ⋯ ㉠, $ab=d$ ⋯ ㉡
$x^2+ax+b=0$에서 $c+d=-a$ ⋯ ㉢, $cd=b$ ⋯ ㉣
㉡, ㉣에 의해서 $abcd=bd$이므로 $ac=1$
a, c가 0이 아닌 정수이므로
$(a, c)=(1, 1)$ 또는 $(a, c)=(-1, -1)$
(i) $(a, c)=(1, 1)$일 때, $b=d=-2$
(ii) $(a, c)=(-1, -1)$일 때, $(b, d)=(2, -2)$
$b+d=0$이므로 모순
∴ $a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=-2$

14 (파란색의 페인트의 양)$=x-x\times\frac{7}{12}+x=12\times\frac{7}{16}$
$x^2-24x+63=0$, $(x-3)(x-21)=0$
$x=3$ 또는 $x=21$
∴ $0<x<12$이므로 $x=3$

15 $x^2-ax+2b-1=0$이 실근을 가지므로
$a^2-4(2b-1)\ge0$
b에 대하여 정리하면
$b\le\frac{a^2+4}{8}$이므로 $M=\frac{a^2+4}{8}$

$-1\le a\le 2$에서 M은 $a=0$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$,

$a=2$일 때 최댓값 1을 갖는다. $\quad\therefore \frac{1}{2}\le M\le 1$

16 $\overline{AB}=x$, $\overline{AE}=y$, $\overline{ED}=z$라 하면

$3x+2y+3z=45$ ⋯ ㉠

$\square ABFE=\frac{1}{3}\square ABCD$이므로

$xy=\frac{1}{3}x(y+z)$에서 $z=2y$ ⋯ ㉡

$3xy=63$이므로 $xy=21$ ⋯ ㉢

㉡을 ㉠에 대입하면 $3x+8y=45$에서 $y=\frac{45-3x}{8}$ ⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $\frac{x(45-3x)}{8}=21$이므로

$x^2-15x+56=0 \qquad \therefore x=7$ 또는 $x=8$

17 버스가 처음 위치를 기준으로 출발한 지 t분 후 버스와 열차의 위치를 t에 관한 식으로 나타내면 버스의 위치는 αt km, 열차의 위치는 (βt^2+5)km(단, α, β는 비례상수)

10분 후와 40분 후의 버스와 열차의 위치가 같으므로

$10\alpha=10^2\beta+5$ ⋯ ㉠

$40\alpha=40^2\beta+5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{5}{8}$, $\beta=\frac{1}{80}$

즉, t분 후 버스의 위치는 $\frac{5}{8}t$ km,

열차의 위치는 $\left(\frac{1}{80}t^2+5\right)$ km이므로

$\frac{1}{80}t^2+5-\frac{5}{8}t=50$에서 $t^2-50t-3600=0$

$(t-90)(t+40)=0 \qquad \therefore t=90\,(\because t>0)$

따라서 출발한 지 90분 후에 열차가 버스보다 50 km 앞서 달리게 된다.

18 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이인 $\overline{BD}$와 $\overline{DC}$의 길이의 비와 같다.

$\overline{BD}=a$라 하면 $\overline{DC}=8-a$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$에서 $5:(a+1)=a:(8-a)$

$a^2+6a-40=0$, $(a+10)(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

$\therefore \triangle ABD:\triangle ADC=\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$

최상위 문제

90~95쪽

01 $2+\sqrt{7}$ **02** 0 **03** $\frac{7}{2}\le x<\frac{9}{2}$ 또는 $-\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2}$

04 $(-2, 0)$, $(1, -3)$

05 $x=-5$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

06 ± 7 **07** 0개 **08** $p=-1$, 최댓값 : 9

09 7개 **10** $x=1$

11 $a=1$일 때 $x=1$, $a\ne 1$일 때 $x=1$ 또는 $\frac{1}{1-a}$

12 $k=-2$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ **13** 91개 **14** 6

15 1 **16** $a<-2$ **17** $\sqrt{6}$ **18** 30 km/h

01 $4+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{4+\cdots}}}=x$라 하면 $4+\frac{3}{x}=x$에서

$(x-2)^2=7$이므로 $x=2\pm\sqrt{7}$

$\therefore x>0$이므로 $x=2+\sqrt{7}$

02 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

$(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})$

$=\alpha^n(1+\alpha+\alpha^2)+\beta^n(1+\beta+\beta^2)=0$

03 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$($n$은 정수)라 하면 $\left[x-\frac{1}{2}\right]=n-1$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-2\left[x-\frac{1}{2}\right]-10=0$에서 $n^2-2n-8=0$,

$(n-4)(n+2)=0$이므로 $n=4$ 또는 $n=-2$

$\therefore \left[x+\frac{1}{2}\right]=4$일 때 $\frac{7}{2}\le x<\frac{9}{2}$,

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=-2$일 때 $-\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2}$

04 $a+b=x$, $a-b=y$라 하면

$x^2-3x-10=0$에서 $x=5$ 또는 $x=-2$

$y^2-2y-8=0$에서 $y=-2$ 또는 $y=4$

(i) $\begin{cases}a+b=5\\a-b=-2\end{cases}$ 일 때, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

(ii) $\begin{cases}a+b=-2\\a-b=-2\end{cases}$ 일 때, $a=-2$, $b=0$

(iii) $\begin{cases}a+b=5\\a-b=4\end{cases}$ 일 때, $a=\frac{9}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

(iv) $\begin{cases}a+b=-2\\a-b=4\end{cases}$ 일 때, $a=1$, $b=-3$

따라서 a, b는 정수이므로 $(a, b)=(-2, 0)$, $(1, -3)$

05 $$\begin{aligned}x^4+6x^3+x^2-24x-20&=(x^2+3x)^2-8x^2-24x-20\\&=(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20\end{aligned}$$

$(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20=0$에서 $x^2+3x=A$라 하면

$A^2-8A-20=0$, $(A+2)(A-10)=0$이므로

$A=-2$ 또는 $A=10$

(ⅰ) $x^2+3x=-2$에서 $(x+2)(x+1)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=-1$

(ⅱ) $x^2+3x=10$에서 $(x+5)(x-2)=0$이므로

$x=-5$ 또는 $x=2$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

06 x에 대한 내림차순으로 정리하여 이차방정식으로 생각한다.

$6x^2-yx-(2y^2-my+6)=0$에서

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+24(2y^2-my+6)}}{12}$$

여기서 근호 안이 완전제곱식이 되어야 주어진 식이 x, y에 대한 일차식으로 인수분해된다.

즉, $49y^2-24my+144=(7y)^2-2\times12\times m\times y+(12)^2$ 이므로 $m=\pm7$

따라서 $m=\pm7$일 때 주어진 식은 일차식으로 인수분해된다.

07 $$\begin{aligned}m^3+6m^2+5m&=m(m+1)(m+2+3)\\&=m(m+1)(m+2)+3m(m+1)\end{aligned}$$에서

m, $m+1$, $m+2$는 연속하는 세 정수이므로 3의 배수이고, $3m(m+1)$도 3의 배수이므로 m^3+6m^2+5m은 3의 배수이다.

$27n^3+9n^2+9n+1=3(9n^3+3n^2+3n)+1$은 3으로 나누면 나머지가 1인 수이므로 3의 배수가 아니다.

따라서 등식이 성립하지 않으므로 만족하는 순서쌍 (m, n)은 없다.

08 $x=p$를 대입하면

$p^2+ap+b=0$ ⋯ ㉠, $p^2+cp+d=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=-(p^2+ap)$, $d=-(p^2+cp)$,

$bd=p^2(p+a)(p+c)$

p^2은 6의 약수이고, $p^2\neq2$, $p^2\neq3$, $p^2\neq6$이므로 $p=\pm1$

$\therefore p=-1\,(\because p<0)$

㉠+㉡에서 $2p^2+(a+c)p+b+d=0$이므로

$a+c=b+d+2$

$bd=6$에서 (b, d)는 $(\pm1, \pm6)$, $(\pm6, \pm1)$, $(\pm2, \pm3)$, $(\pm3, \pm2)$

따라서 $b+d$의 최댓값은 7이므로 $a+c$의 최댓값은 9

09 $f(f(x))=m$이라 하면 $f(f(x))=f(f(f(x)))$에서

$m=m^2-2$

$(m+1)(m-2)=0$이므로 $m=-1$ 또는 $m=2$

$m=-1$일 때, $f(f(x))=-1$에서 $\{f(x)\}^2=1$이므로

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

(ⅰ) $f(x)=-1$일 때, $x^2-2=-1$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$

(ⅱ) $f(x)=1$일 때, $x^2-2=1$이므로 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

같은 방법으로 $m=2$일 때, $x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 근의 개수는 -2, $-\sqrt{3}$, -1, 0, 1, $\sqrt{3}$, 2의 7개이다.

10 정수해를 $x=\alpha$라 하면 $\alpha^2-2p\alpha+q=0$에서

$\alpha(2p-\alpha)=q$ ⋯ ㉠

q는 소수이므로 ㉠에서

$\alpha=1$, $2p-\alpha=q$ 또는 $\alpha=q$, $2p-\alpha=1$

(ⅰ) $\alpha=1$, $2p-\alpha=q$에서 $q=2p-1$

(ⅱ) $\alpha=q$, $2p-\alpha=1$에서 $2p-q=1$이므로 $q=2p-1$

$q=2p-1$을 방정식에 대입하면 $x^2-2px+2p-1=0$

$(x-2p+1)(x-1)=0$

따라서 p의 값에 관계없이 $x=1$을 근으로 갖는다.

11 $(a^2, (x-1)^2)\cdot(a, x^2-x)=0$에서

$a^2(x^2-x)-a(x^2-2x+1)=0$을 정리하면

$(a^2-a)x^2-(a^2-2a)x-a=0$

$a(x-1)\{(a-1)x+1\}=0$

따라서 $a=1$일 때 $x=1$, $a\neq1$일 때 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1}{1-a}$

12 이차방정식의 두 근을 a, b라 하면

양의 근이 음의 근의 절댓값보다 작으므로 $a+b<0$, $ab<0$

근과 계수의 관계에 의해서 $-(k+3)<0$, $2k+3<0$이므로

$-3<k<-\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하여 정리하면

$x^2+x-1=0$

$$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

13 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=210$에서

$(n-20)(n+21)=0$이므로 $n=20$

1번부터 4번까지의 구슬이 나오면 $1+2+3+4=10$(개),

5번부터 20번까지 5개씩 구슬이 나오면 $16\times5=80$(개),

여기에서 아무거나 한 개의 구슬을 더 꺼내면 같은 번호의 구슬이 6개가 된다.

따라서 최대 $10+80+1=91$(개)의 구슬을 꺼내야 한다.

14 $(n-1)$개의 선분을 그으면 n개의 직사각형이 생기므로

$$\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\}\times\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\}=441$$

$\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2=21^2$ 이므로 $\dfrac{n(n+1)}{2}=21$

$n^2+n-42=0$에서 $(n+7)(n-6)=0$

$\therefore$ $n>0$이므로 $n=6$

15 두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때,

$\alpha+\beta=-a>0$, $\alpha\beta=a^2-4>0$, $a^2-4(a^2-4)\ge0$

이므로 $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\le a<-2$

(ii) 한 근이 양수이고 한 근이 음수일 때,

$\alpha\beta=a^2-4<0$이므로 $-2<a<2$

(iii) 한 근이 양수이고 한 근이 0일 때,

$\alpha+\beta=-a>0$, $\alpha\beta=a^2-4=0$이므로 $a=-2$

따라서 (i)~(iii)에 의해서 $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\le a<2$이므로

정수 a의 최댓값은 1

16 $x^2+x+a=0$ ⋯ ㉠, $x^2+ax+1=0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $1-4a>0$이므로 $a<\dfrac{1}{4}$ ⋯ ㉢

㉡에서 $a^2-4>0$이므로 $a<-2$ 또는 $a>2$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡이 공통근을 갖는 경우는

㉠−㉡을 하면 $(1-a)(x-1)=0$이므로 $a=1$ 또는 $x=1$

$x=1$일 때 $a=-2$이므로

$a=1$ 또는 $a=-2$일 때, 공통근을 갖는다.

공통근을 가지지 않을 조건은 $a\ne1$, $a\ne-2$ ⋯ ㉤

따라서 ㉢, ㉣, ㉤에 의해 $a<-2$

17 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\triangle\mathrm{BPR}\backsim\triangle\mathrm{BAO}$이고

닮음비가 $x:8$이므로 두 삼각형의 넓이의 비는

$a^2:\left(\dfrac{1}{2}\times6\times8\right)=x^2:8^2$

$x^2=\dfrac{8}{3}a^2$ $\quad\therefore x=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}a$ ⋯ ㉠

이때 직선 AB의 방정식 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$에 ㉠을 대입하면

$y=6-\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

$\therefore \mathrm{P}(x, y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{6}a,\ 6-\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$

따라서 $\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\sqrt{6}a\times\left(6-\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)=2\sqrt{6}a-a^2$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이가 6이므로 $2\sqrt{6}a-a^2=6$

$a^2-2\sqrt{6}a+6=0$, $(a-\sqrt{6})^2=0$

$\therefore a=\sqrt{6}$

18 서율이가 집에서 박물관으로 갈 때의 속력과 걸린 시간을 각각 v km/시, t시간이라 하면 박물관에서 집으로 올 때의 속력과 걸린 시간은 각각 $(v-10)$ km/시, $\left(t+\dfrac{1}{3}\right)$시간이다.

이때 집과 박물관 사이의 거리는 20 km로 일정하므로

$20=vt=(v-10)\left(t+\dfrac{1}{3}\right)$에서

$20=vt$ ⋯ ㉠

$vt=(v-10)\left(t+\dfrac{1}{3}\right)=vt+\dfrac{1}{3}v-10t-\dfrac{10}{3}$

$\therefore v=30t+10$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3t^2+t-2=0$, $(3t-2)(t+1)=0$

이때 $t>0$이므로 $t=\dfrac{2}{3}$

$\therefore v=30\times\dfrac{2}{3}+10=30$(km/시)

특목고 / 경시대회 실전문제

96~98쪽

01 공통근 $x=1$, 나머지 세 근의 곱 : 1 **02** 10쌍

03 40 % 또는 60 % **04** 175 **05** 267개

06 $\dfrac{a+b+2}{ab-1}$배 **07** $\dfrac{3}{2}$ **08** 40 **09** 64

01 세 이차방정식의 공통근을 p라 하자.

$x=p$를 세 이차방정식에 대입하면 $ap^2+bp+c=0$, $bp^2+cp+a=0$, $cp^2+ap+b=0$

세 식을 모두 더하면 $(a+b+c)(p^2+p+1)=0$

$\therefore a+b+c=0(\because p^2+p+1\ne0)$

$b=-a-c$를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-(a+c)x+c=0$

$(x-1)(ax-c)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{c}{a}$

$c=-a-b$를 이차방정식 $bx^2+cx+b=0$에 대입하면

$bx^2-(a+b)x+a=0$

$(x-1)(bx-a)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{a}{b}$

$a=-b-c$를 이차방정식 $cx^2+ax+b=0$에 대입하면

$cx^2-(c+b)x+b=0$

$(x-1)(cx-b)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=\frac{b}{c}$

따라서 공통근은 $x=1$이고,

나머지 근들은 각각 $x=\frac{c}{a}$, $x=\frac{a}{b}$, $x=\frac{b}{c}$이다.

∴ 나머지 세 근의 곱은 $\frac{c}{a}\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=1$

02 우선, $l\le m\le n$이라 생각하고 푼 다음 l, m, n의 대소 관계를 바꾸어 생각하면 된다.

그러므로 일단 $l\le m\le n$이므로 $\frac{1}{l}\ge\frac{1}{m}\ge\frac{1}{n}\ge0$이 된다.

$$\therefore \frac{1}{l}<\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}(=1)\le\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}=\frac{3}{l}$$

따라서 가능한 정수 $l=2$, 3 뿐이다.

(i) $l=2$일 때 : $\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \qquad \therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$

또한 $\frac{1}{m}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\left(=\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}$

$\therefore 2<m\le4$ 여기서 $m=3$, 4이다.

$m=3$일 때, $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2} \qquad \therefore n=6$

$m=4$일 때, $\frac{1}{4}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2} \qquad \therefore n=4$

(ii) $l=3$일 때 : $\frac{1}{3}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \qquad \therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$

또한 $\frac{1}{m}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\left(=\frac{2}{3}\right)\le\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}$

$\therefore \frac{3}{2}<m\le3$ 그런데 $3=l\le m$이므로 $m=3$이다.

$\therefore \frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3} \qquad \therefore n=3$

위 (i), (ii)의 결과와 l, m, n의 대소를 바꾸어 생각하면, 모든 가능한 자연수의 서로 다른 순서쌍은 다음과 같이 10쌍이다.

$(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 2, 4)$, $(4, 4, 2)$,
$(2, 6, 3)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 6, 2)$, $(6, 2, 3)$, $(6, 3, 2)$

03 원래의 요금을 a원, 승객 수를 b명이라 하면 인상 후 요금은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

인상 후 승객 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$명, 인상 후 수입액은

$ab\left(1+\frac{12}{100}\right)$원

$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{12}{100}\right)$에서

$$1-\frac{x}{200}+\frac{x}{100}-\frac{x^2}{20000}=1+\frac{12}{100}$$

$x^2-100x+2400=0$에서 $(x-40)(x-60)=0$

$\therefore x=40$ 또는 $x=60$

04 직사각형 A와 B의 세로의 길이를 각각 $2x$ cm, y cm라 하면, 조건 ㈎에 의해 가로의 길이는 각각 $3x$ cm, $4y$ cm이다. 그러므로 조건 ㈏에 의하여 $10y=10x-2$이고 다음이 성립한다.

$x=y+\frac{1}{5}$ ⋯ ㉠

또, 조건 ㈐에 의하여 $(3x-1)(2x-1)=4y^2$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠을 ㉡에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$4y^2=\left\{3\left(y+\frac{1}{5}\right)-1\right\}\left\{2\left(y+\frac{1}{5}\right)-1\right\}$$

$50y^2-65y+6=0$, $(5y-6)(10y-1)=0$

$\therefore y=\frac{6}{5}$ 또는 $y=\frac{1}{10}$

이때 조건 ㈐에 의해 (세로의 길이)$=2x>1$이므로

$y+\frac{1}{5}>\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore y>\frac{3}{10}$이므로 $y=\frac{6}{5}$

따라서 $2x=2\left(y+\frac{1}{5}\right)=2\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{5}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{14}{5}-\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$

$\therefore 20a+3b=175$

05 주어진 이차방정식의 근이 자연수이므로

$(6k+1)^2-4(9k^2-3)=12k+13$은

어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

이때 $12k+13$는 홀수이므로 홀수의 제곱이어야 한다.

이제 2 이상 자연수 n에 대해

$12k+13=(2n+1)^2$, 즉 $k=\frac{n(n+1)}{3}-1$

그러면 주어진 방정식의 근은 다음과 같은 두 자연수이다.

$$x=\frac{6k+1\pm\sqrt{12k+13}}{2}=\frac{2n^2+2n-5\pm(2n+1)}{2}$$

$\therefore x=n^2+2n-2$ 또는 $x=n^2-3$

위의 두 자연수가 모두 세 자리 수이므로

$100\le n^2-3$이고 $n^2+2n-2<1000$이어야 한다.

즉 $103\le n^2$이고 $(n+1)^2<1003$이어야 한다.

따라서 $11\le n\le30$이므로 k의 범위는 다음과 같다.

$\frac{11\times12}{3}-1\le k\le\frac{30\times31}{3}-1$

그러므로 구하는 값은 $309-43+1=267$(개)이다.

06 갑, 을, 병이 혼자서 어떤 일을 하는 데 걸리는 시간을 각각 x, y, z라 하면

$a\times\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$에서 $\frac{1}{z}=\frac{a}{x}-\frac{1}{y}$ $\cdots$ ㉠,

$b\times\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$에서 $\frac{1}{z}=-\frac{1}{x}+\frac{b}{y}$ $\cdots$ ㉡

㉠$\times b+$㉡에서 $\frac{1}{x}=\frac{(b+1)}{(ab-1)}\times\frac{1}{z}$,

㉡$\times a+$㉠에서 $\frac{1}{y}=\frac{(a+1)}{(ab-1)}\times\frac{1}{z}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{a+b+2}{ab-1}\times\frac{1}{z}$

$\therefore \frac{a+b+2}{ab-1}$(배)

07 점 B를 $(0,\ 0)$으로 두고 주어진 도형을 좌표평면에 나타낼 때, 직선 AE의 방정식은 $y=-x+10$,

직선 CD의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+8$,

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x$이다.

점 H의 좌표를 $(a,\ 0)$라 하면 (즉, $\overline{\mathrm{BH}}=a$)

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{2}{3}a\right)$, $\mathrm{G}'\left(12-a,\ \frac{2}{3}a\right)$이다.

(색칠한 부분의 넓이)

=(직사각형 FBHG의 넓이)+(직사각형 PHJG′의 넓이)

이므로

$S=a(-a+10)+\frac{2}{3}a(12-2a)=\frac{87}{4}$

$28a^2-216a+261=0$

$(2a-3)(14a-87)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ $(\because 0<a<6)$

08 주어진 식을 다음과 같이 변형해 보자.

$(m^4-2nm^2+n^2)-4m^2=52$

$(m^2-n)^2-(2m)^2=52$

$(m^2-n-2m)(m^2-n+2m)=2^2\times13$

위 식의 좌변의 두 인수의 차는 $4m$으로 4의 배수이므로 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

(ⅰ) $\begin{cases}(m^2-n)-2m=2\\(m^2-n)+2m=26\end{cases}$ 또는 (ⅱ) $\begin{cases}(m^2-n)-2m=-26\\(m^2-n)+2m=-2\end{cases}$

먼저 (ⅰ)의 경우 $4m=24$에서 $m=6$이고 $n=22$이다.

같은 방법으로, (ⅱ)의 경우에는 $m=6$이고 $n=50$이다.

그러므로 $15m-n$의 최솟값은 40이다.

09 (ⅰ) $x=1$일 때, $\{x\}=1$, $\{x^2\}=1$이므로 $1-1-6\neq0$

(ⅱ) $x=p^a$(p는 소수, a는 자연수) 일 때,

$\{x\}=a+1$, $\{x^2\}=2a+1$이므로

$(2a+1)-(a+1)-6=0$ $\quad\therefore a=6$

$p=2$이면 $x=2^6<200$, $p\geq3$이면 $x>300$이므로

정수해는 $x=2^6$뿐이다.

(ⅲ) $x=p^aq^b$(p, q는 소수, a, b는 자연수) 일 때,

$\{x\}=(a+1)(b+1)$, $\{x^2\}=(2a+1)(2b+1)$

$\{x^2\}-\{x\}-6=0$에 대입하면

$(2a+1)(2b+1)-(a+1)(b+1)-6=0$

$3ab+a+b=6$, $9ab+3a+3b=18$,

$(3a+1)(3b+1)=19$

19는 소수이므로 식을 만족하는 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 $\{x^2\}-\{x\}-6=0$을 만족하는 200 이하의 자연수 x의 값은 $2^6=64$이다.

Ⅳ. 이차함수

1 이차함수의 그래프

핵심 문제 01

100쪽

1 $k\neq-\frac{2}{3}$　**2** 3　**3** ②　**4** $-\frac{1}{2}$

5 (1) $-1,\ 3$　(2) $-1<x<3$

1 $y=(x-3)(2x+1)-kx(4-3x)$

$=(2+3k)x^2-(5+4k)x-3$

이 함수가 이차함수가 되려면

$2+3k\neq0$　$\therefore k\neq-\frac{2}{3}$

2 $y=2(a+x)^2+4(a+x)+1$에 $(-4,\ -1)$을 대입하면

$2(a-4)^2+4(a-4)+1=-1$

$2a^2-16a+32+4a-16+1=-1$

$2a^2-12a+18=0$

$2(a-3)^2=0$　$\therefore a=3$

3 $y=-3(x-p)^2+23$에 $x=2,\ y=-4$를 대입하면

$-4=-3(2-p)^2+23$

$(2-p)^2=9$

$2-p=\pm3$

$\therefore p=-1(\because p<2)$

따라서 $x>-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

4 점 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, △OPQ의 한 변의 길이를 x라 하자.

△OPH에서 $\overline{OP}=x,\ \overline{PH}=\frac{1}{2}x$이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}\times x\times6$

$\sqrt{3}x^2=12x,\ \sqrt{3}x(x-4\sqrt{3})=0$　$\therefore x=4\sqrt{3}(\because x>0)$

점 $Q(2\sqrt{3},\ -6)$이므로 $y=ax^2$에 대입하면

$-6=a\times(2\sqrt{3})^2$　$\therefore a=-\frac{1}{2}$

5 (1) $f(x)=g(x)$의 근은 두 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x=-1,\ x=3$

(2) $f(x)>g(x)$의 해는 $f(x)$의 그래프가 $g(x)$의 그래프 위에 있는 부분이다.　$\therefore -1<x<3$

응용 문제 01

101쪽

예제 ① 1, −2, 2, 101, 101, 10004, 4, 2501 / 2501

1 3　**2** $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{8}\right)$

3 $y=x^2-4x$　**4** $(2,\ 6),\ (1+\sqrt{7},\ -6)$

1 $\overline{AB}=2$이므로 $B(2,\ 4a)$

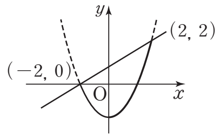
$\overline{BC}=a+1$이므로 $C\left(a+3,\ \frac{1}{3}(a+3)^2\right)$

점 B, C의 y좌표가 같으므로 $4a=\frac{1}{3}(a+3)^2$

$12a=a^2+6a+9,\ (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

2 $y=\frac{1}{2}x+1$에



$x=-2$를 대입하면 $y=0$이고

$x=2$를 대입하면 $y=2$이다.

$y=\frac{1}{2}(x+a)^2+b$에 $(-2,\ 0),\ (2,\ 2)$를 각각 대입하면

$0=\frac{1}{2}(-2+a)^2+b\cdots$ ㉠, $2=\frac{1}{2}(2+a)^2+b\cdots$ ㉡

㉡−㉠을 하면 $2=\frac{1}{2}\{(2+a)^2-(-2+a)^2\}$

위 식을 정리하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-\frac{9}{8}$

따라서 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{8}$이므로

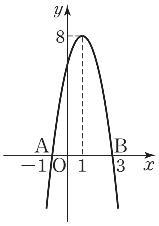
꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{8}\right)$

3 주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $(2p,\ 4p^2-8p)$이므로

이 좌표를 정리하면 $4p^2-8p=(2p)^2-4\times2p$

따라서 $2p=x$를 $y=4p^2-8p$에 대입하면 $y=x^2-4x$이다.

4 $-2(x-1)^2+8=0,\ (x-1)^2=4$



$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore \overline{AB}=4$

△PAB의 $\overline{AB}$에 대한 높이가 6이어야 한다.

(ⅰ) $-2(x-1)^2+8=6$에서 $(x-1)^2=1$

$x>0$이므로 $x=2$

(ⅱ) $-2(x-1)^2+8=-6$에서 $(x-1)^2=7$

$x>0$이므로 $x=1+\sqrt{7}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(2,\ 6)$ 또는 $(1+\sqrt{7},\ -6)$이다.

핵심 문제 02

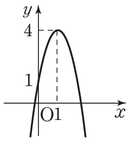
102쪽

1 ④ **2** $(2,\ 3)$ **3** ⑤ **4** $56-16\sqrt{10}$ **5** $-\frac{3}{2}$

1 $y=-3x^2+6x+1=-3(x-1)^2+4$

꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 4)$

y절편은 $x=0$일 때의 y의 값이므로 $y=1$



2 $y=-\frac{1}{2}x^2+mx+2m-3$

$=-\frac{1}{2}(x-m)^2+\frac{1}{2}m^2+2m-3$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(m,\ \frac{1}{2}m^2+2m-3\right)$이다.

$m=2,\ \frac{1}{2}m^2+2m-3=3$

따라서 주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

3 포물선 모양이 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\quad\therefore b>0$

y절편이 x축 아래쪽이므로 $c<0$

④ $f(2)=4a+2b+c>f(1)>0$

⑤ $a^2-b^2+c^2+2ac$

$=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2$

$=(a+b+c)(a-b+c)>0\ (\because f(1)>0,\ f(-1)<0)$

4 $\overline{AB}=2k(k>0)$라 하면 $A(-2-k,\ 0)$, $B(-2+k,\ 0)$

점 C의 x좌표는 $-2+k$, y좌표는 $y=-\frac{1}{2}k^2+3$

$\overline{BC}=2k$이므로 $-\frac{1}{2}k^2+3=2k$에서 $k=-2+\sqrt{10}$

$\therefore \square ABCD=(2k)^2=4(-2+\sqrt{10})^2=56-16\sqrt{10}$

5 $y=x^2+2mx+n$의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=1+2m+n$ $\quad\therefore n=-2m-3$

$y=x^2+2mx-2m-3=(x+m)^2-m^2-2m-3$

꼭짓점 $(-m,\ -m^2-2m-3)$이 직선 $4x+4y+3=0$

위에 있으므로 대입하면

$-4m-4m^2-8m-12+3=0$

$4m^2+12m+9=0,\ (2m+3)^2=0$

$\therefore m=-\frac{3}{2},\ n=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-3=0$

$\therefore m-n=-\frac{3}{2}-0=-\frac{3}{2}$

응용 문제 02

103쪽

예제 2 $2,\ 2,\ <,\ >,\ 9\ /\ 2\ /\ a>9$

1 제2사분면 **2** $-2a+2b$ **3** $\frac{13}{18}$ **4** 4

1 $y=ax+b$에서 $a<0,\ b>0$

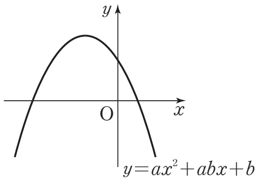
$y=ax^2+abx+b$에서

$a<0$: 위로 볼록

$ab<0$: 축이 y축의 왼쪽

$b>0$: y절편이 양수

따라서 꼭짓점은 제2사분면에 있다.



2 $y=x^2+2ax+b$에서 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $a<0$

또, y절편이 양수이므로 $b>0$

$a-b<0,\ b-a>0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-a)^2}=(-a+b)+(b-a)$

$=-2a+2b$

3 $y=x^2-6x+a+b=(x-3)^2-9+a+b$에서

꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -9+a+b)$이므로 꼭짓점이

제4사분면에 있으려면

(꼭짓점의 y좌표)$=-9+a+b<0,\ a+b<9$

(i) $a+b=9$인 경우

$(a,\ b)=(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$

(ii) $a+b=10$인 경우

$(a,\ b)=(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$

(iii) $a+b=11$인 경우

$(a,\ b)=(5,\ 6),\ (6,\ 5)$

(iv) $a+b=12$인 경우

$(a,\ b)=(6,\ 6)$

따라서 꼭짓점이 제4사분면에 있을 확률은 $1-\frac{10}{36}=\frac{13}{18}$

4 $y=x^2-2ax+3a^2+2b^2+8b+16$

$=(x-a)^2+2a^2+2b^2+8b+16$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 2a^2+2b^2+8b+16)$

이 꼭짓점이 포물선 $y=x^2-4x+4$ 위에 있으므로

$2a^2+2b^2+8b+16=a^2-4a+4$

$a^2+4a+2b^2+8b+12=0,\ (a+2)^2+2(b+2)^2=0$

그런데, $a,\ b$가 실수이므로 $a+2=0,\ b+2=0$

$\therefore a=-2,\ b=-2$이므로 $ab=4$

핵심문제 03

104쪽

1 2 **2** $a=2$, $b=-3$ **3** 36 **4** $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ **5** 27

1 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -1)$이므로

$y=a(x+2)^2-1$로 놓고 $(0,\ 1)$을 대입하면

$1=4a-1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1=\frac{1}{2}x^2+2x+1$

$\therefore ab+c=\frac{1}{2}\times 2+1=2$

2 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 $-2=-1+a+b$에서

$a+b=-1 \cdots$ ㉠

$y=-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b$이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}+b\right)$이고

$y=-3x+1$ 위에 있으므로 $\frac{a^2}{4}+b=-3\times\frac{a}{2}+1$에서

$a^2+6a+4b-4=0 \cdots$ ㉡

㉠에서 $b=-1-a$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2+2a-8=0$에서 $(a+4)(a-2)=0$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$, $b=-3$

3 $y=a(x+6)(x-3)$라 놓고 $(4,\ -20)$을 대입하면

$-20=a(4+6)(4-3) \qquad \therefore a=-2$

$y=-2(x+6)(x-3)$

$\therefore$ (y절편)$=-2(0+6)(0-3)=36$

4 $x=-3$에서 x축에 접하므로

$y=a(x+3)^2$라 놓고 $(-5,\ 2)$를 대입하면

$2=4a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+3)^2$

5 [그림1]에서 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ 4)$이므로

이차함수의 식은 $y=a(x-5)^2+4 \quad \cdots$ ㉠

㉠에 $(3,\ 0)$을 대입하면 $0=a(3-5)^2+4$, $a=-1$

$\therefore y=-(x-5)^2+4$

[그림2]의 그래프는 [그림 1]의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 $y=-(x-5)^2+4+5$

$\therefore y=-(x-5)^2+9$

x절편 : $0=-(x-5)^2+9$, $(x-5)^2=9$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(8,\ 0)$, C$(5,\ 9)$이므로

$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

응용문제 03

105쪽

예제 ③ 3, -3, m, m, $-m$, 2, -2, 1, -2, 0, 1 / $(0,\ 1)$

1 $\frac{3}{4}$ **2** $\frac{11}{2}$ **3** $(1,\ 0)$ **4** ⑤

1 $y=-\frac{2}{3}x^2+8$을 꼭짓점을 중심으로 하여 180°만큼 회전한 그래프의 식은 $y=\frac{2}{3}x^2+8$

$y=\frac{2}{3}x^2+8$의 그래프가 점 $(2a,\ 2a-5)$를 지나므로 대입하면

$2a-5=\frac{8}{3}a^2+8 \qquad \therefore 8a^2-6a+39=0$

따라서 근과 계수와의 관계에 의해 상수 a의 값들의 합은

$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

2 ㈎에 의해 $a=-\frac{1}{2}$이고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

$y=ax^2+bx+c=-\frac{1}{2}(x-p)^2+q \cdots$ ㉠

㉠의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q-2)=(-2,\ 4)$

$\therefore p=-2$, $q=6$

$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+6=-\frac{1}{2}x^2-2x+4$

$\therefore b=-2$, $c=4$

$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+4$는 $(-3,\ k)$를 지나므로

$k=-\frac{1}{2}(-3+2)^2+4=\frac{7}{2}$

$\therefore b+c+k=-2+4+\frac{7}{2}=\frac{11}{2}$

3 $y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$의

꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$y=-x^2+8x-17=-(x-4)^2-1$의

꼭짓점의 좌표는 $(4,\ -1)$

두 포물선이 점 A에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점에서 점 A에 이르는 거리가 각각 같다.

즉, 점 $(-2, 1)$과 점 $(4, -1)$의 중점을 구한다.

점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$a=\frac{-2+4}{2}=1$, $b=\frac{1+(-1)}{2}=0$

따라서 점 A의 좌표는 $(1, 0)$

4 $f(x)=-2(x-l)(x-n)$

$y=g(x)$의 기울기는 $\frac{g(m)}{m-l}$이고,

$g(m)=f(m)=-2(m-l)(m-n)$이므로

$(\text{기울기})=\frac{g(m)}{m-l}=\frac{f(m)}{m-l}=\frac{-2(m-l)(m-n)}{m-l}$

$=-2m+2n$

심화 문제

106~111쪽

01 -3 **02** 6 **03** $a<0$ 또는 $b<0$

04 -2 **05** $\mathrm{P}\left(\sqrt{7}, \frac{7}{2}\right)$ **06** $1+\sqrt{6}$

07 $y=\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4$ **08** 9 **09** 9

10 $y=x^2-2x\,(x\ge 0)$ **11** $\frac{1}{36}$ **12** 19

13 $\frac{3}{32}$ **14** $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ **15** 1

16 2 **17** $y=-2x^2+8x-4$ **18** $\frac{2}{3}$

01 $(1, m)$, $(-1, n)$이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 위에 있으므로

$m=a+b+c$ ⋯ ㉠

$n=a-b+c$ ⋯ ㉡

㉠$-$㉡에서 $m-n=2b=-6$

$\therefore b=-3$

02 세 점의 좌표를 대입하면 $\begin{cases} 16=c \\ 10=a-b+c \\ -14=9a-3b+c \end{cases}$

연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$, $c=16$

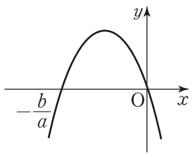
$\therefore y=-2x^2+4x+16$

x축과의 두 교점 즉, x절편은 $-2(x+2)(x-4)=0$

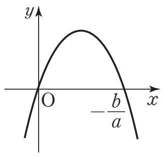
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 x축과의 두 교점 사이의 거리는 $4-(-2)=6$

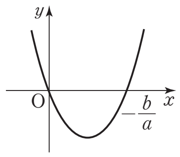
03 (i) 이차함수 $y=ax^2+bx$는 $(0, 0)$을 지나므로 제4사분면을 지나려면 그래프는 다음과 같은 형태이어야 한다.



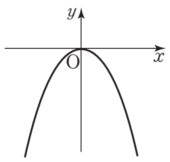
➡ $a<0$, $b<0$



➡ $a<0$, $b>0$

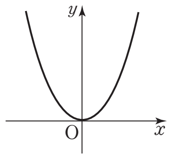


➡ $a>0$, $b<0$

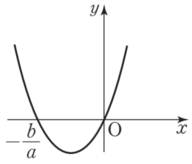


➡ $a<0$, $b=0$

(ii) 다음과 같은 형태일 때, 함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.



➡ $a>0$, $b=0$



➡ $a>0$, $b>0$

따라서 (i), (ii)에 의해 $y=ax^2+bx$가 제4사분면을 지나려면 $a<0$ 또는 $b<0$

04 $b=a^2+3a-1$ ⋯ ㉠

$d=c^2+3c-1$ ⋯ ㉡

㉠$-$㉡에서 $b-d=(a-c)(a+c+3)$

$\frac{b-d}{a-c}=a+c+3$ ⋯ ㉢

또한, 두 점 A, B가 직선 $x+y=0$에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기는 $\frac{b-d}{a-c}=1$이어야 한다.

㉢에서 $a+c+3=1$ $\therefore a+c=-2$

05 $x=1$일 때 $y=\frac{3}{2}\times1+\frac{1}{2}=2$ $\therefore \mathrm{B}(1, 2)$

$y=2$일 때 $2=\frac{1}{2}x^2$, $x^2=4$, $x=2\,(x>0)$ $\therefore \mathrm{C}(2, 2)$

$x=2$일 때 $y=\frac{3}{2}\times2+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore \mathrm{D}\left(2, \frac{7}{2}\right)$

$y=\frac{7}{2}$일 때 $\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x^2$, $x^2=7$, $x=\sqrt{7}\,(x>0)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\sqrt{7}, \frac{7}{2}\right)$

06 $y=a(x-b)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 $(b, 0)$을

$y=-\frac{1}{3}x^2+2$에 대입하면

$0=-\frac{1}{3}b^2+2$에서 $b^2=6$ $\quad \therefore b=\sqrt{6}\,(\because b>0)$

$y=-\frac{1}{3}x^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 $(0,\ 2)$를

$y=a(x-\sqrt{6})^2$에 대입하면 $2=6a$에서 $a=\frac{1}{3}$

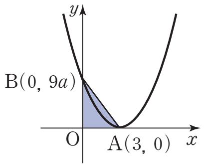
$\therefore 3a+b=3\times\frac{1}{3}+\sqrt{6}=1+\sqrt{6}$

07 꼭짓점이 $A(3,\ 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2$이라 하자.
$x=0$일 때, $y=9a$이므로 $B(0,\ 9a)$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times3\times9a=6$에서

$a=\frac{4}{9}$

$\therefore y=\frac{4}{9}(x-3)^2=\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4$

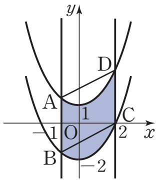


08 $y=ax^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-ax^2$
x축으로 1만큼, y축으로 q만큼 평행이동하면
$y-q=-a(x-1)^2$
$y=-ax^2+2ax-a+q=-2x^2+px+1$이므로
$a=2$, $2a=p$, $-a+q=1$에서 $p=4$, $q=3$
$\therefore a+p+q=9$

09 점 A의 좌표 : $\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$

점 B의 좌표 : $\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$

점 C의 좌표 : $(2,\ 0)$, 점 D의 좌표 : $(2,\ 3)$
오른쪽의 색칠된 도형의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.
$\therefore \square ABCD=3\times3=9$



10 $y=x^2-6xk+9k^2+9k^2-6k=(x-3k)^2+9k^2-6k$
꼭짓점의 좌표는 $(3k,\ 9k^2-6k)$
$x=3k$, $y=9k^2-6k=x^2-2x$
$\therefore y=x^2-2x\,(x\geq0)$

11 $y=ax^2+b$에 $(2,\ 6)$을 대입하면 $6=4a+b$ ⋯ ㉠
$(-3,\ 11)$을 대입하면 $11=9a+b$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$이므로
순서쌍 $(a,\ b)=(1,\ 2)$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{36}$이다.

12 주어진 부등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$임을 알 수 있다.
그러므로 $f(x)=ax^2+bx+1$의 꼴로 나타낼 수 있다.
이것을 주어진 부등식에 대입하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$x^2\leq ax^2+bx\leq3x^2$, $1\leq a+\frac{b}{x}\leq3$ (단, $x\neq0$)

$b\neq0$이면 $\frac{b}{x}$가 임의의 수가 될 수 있으므로, $b=0$이고 이에 따라 $1\leq a\leq3$이다.
즉, $f(x)=ax^2+1$이다. (단, $1\leq a\leq3$)
이제 $f(1)=a+1=3$에서 $a=2$이다.
즉, $f(x)=2x^2+1$이다.
따라서 $f(3)=2\times3^2+1=19$

13 $y=x^2-x-3$과 $x-y+5=0$의 그래프의 교점의 좌표를 구하면 $(-2,\ 3)$, $(4,\ 9)$이고, 이 두 교점의 좌표를
$y=ax^2+bx+4$에 대입하여 풀면

$a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{3}{4}$ $\quad \therefore ab=\frac{3}{32}$

14 $0=-2x^2+4x+6$에서 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$
$A(-1,\ 0)$, $B(3,\ 0)$
$y=-2x^2+4x+6=-2(x^2-2x+1-1)+6$
$\quad=-2(x-1)^2+8$
이므로 $C(1,\ 8)$
$A(-1,\ 0)$을 지나고 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지난다.

$\overline{BC}$의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{0+8}{2}\right)=(2,\ 4)$

직선 AM의 기울기는 $\frac{4-0}{2-(-1)}=\frac{4}{3}$

$y=\frac{4}{3}x+b$에 $A(-1,\ 0)$을 대입하여 풀면 $b=\frac{4}{3}$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

15 $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$에서
$a^2-k=b$ ⋯ ㉠, $b^2-k=c$ ⋯ ㉡, $c^2-k=a$ ⋯ ㉢

㉠$-$㉡에서 $a+b=\frac{b-c}{a-b}$

㉡$-$㉢에서 $b+c=\frac{c-a}{b-c}$

㉢$-$㉠에서 $c+a=\frac{a-b}{c-a}$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=\frac{b-c}{a-b}\times\frac{c-a}{b-c}\times\frac{a-b}{c-a}=1$

16 $f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c$

$=2ax+a+b$

$f(100)-f(99)=2a\times99+a+b=16$ ⋯ ㉠

$f(101)-f(100)=2a\times100+a+b=20$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$

17 $y=2x^2-8x+10=2(x-2)^2+2$를 꼭짓점 (2, 2)를 중심으로 회전이동한 식은 $y=-2(x-2)^2+2$이다.

이를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 식은

$y=-2(x-2)^2+2+k=-2(x^2-4x+4)+2+k$

$=-2x^2+8x-6+k$이다.

x축과 만나는 두 점의 좌표를 α, β라 하면, $|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

$-2x^2+8x-6+k=0$ 즉, $2x^2-8x+6-k=0$이므로

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=\frac{6-k}{2}$

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$이므로

$16=8+2(6-k)$ $\therefore k=2$

따라서 포물선 C_2의 식은 $y=-2x^2+8x-4$

18 $x=0$일 때, $y=9$이므로 A(0, 9)

점 B의 y좌표가 9이므로 $9=x^2-6x+9$,

$x(x-6)=0$, $x=0$ 또는 $x=6$ $\therefore$ B(6, 9)

$y=x+m$이 점 A(0, 9)를 지나면 $m=9$이고,

점 B(6, 9)를 지나면 $m=3$이므로

직선 $y=x+m$이 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만나려면 $3\le m\le9$이고, m의 값은 3, 4, 5, 6이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

최상위 문제

112~117쪽

01 $-\frac{9}{9982}$ **02** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ **03** ±1

04 $a=3$, $b=-12$, $c=17$ **05** $0<f(3)<14$

06 $5\le k\le13$ **07** 9 **08** $\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}, \frac{91}{18}\right)$ **09** 16 **10** -2

11 $\frac{2\alpha+\beta+r}{4}$ **12** $\frac{2}{3}\pi$ **13** 12 **14** 18

15 $\left(0, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **16** $\frac{2}{3}$ **17** 10 **18** 2

01 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}(x-3)^2+9$

$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x+1=-\frac{1}{2}(x-4)^2+9$

이차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+9$의 그래프는 이차함수 $g(x)=-\frac{1}{2}(x-4)^2+9$의 그래프를 x축의 방향으로 $3-4=-1$만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=g(x+1)$

$$\therefore \frac{f(-96)f(-95)f(-94)\cdots f(0)}{g(-96)g(-95)g(-94)\cdots g(0)}$$

$$=\frac{g(-95)g(-94)g(-93)\cdots g(0)g(1)}{g(-96)g(-95)g(-94)\cdots g(-1)g(0)}=\frac{g(1)}{g(-96)}$$

이때 $g(1)=-\frac{1}{2}\times(-3)^2+9=\frac{9}{2}$

$g(-96)=-\frac{1}{2}\times(-100)^2+9=-4991$이므로

$\frac{g(1)}{g(-96)}=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{4991}\right)=-\frac{9}{9982}$

02 $y=2x^2-2(a-2)x+a^2-3a-10$

$=2\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-24}{2}$

꼭짓점이 제4사분면에 있으므로

$\frac{a-2}{2}>0$, $\frac{a^2-2a-24}{2}<0$에서 $2<a<6$ ⋯ ㉠

또한 $x=0$일 때의 값이 -6보다 크므로

$a^2-3a-10>-6$에서 $a<-1$ 또는 $a>4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $4<a<6$, a는 정수이므로 $a=5$

주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

03 $y=x^2+2px+\sqrt{2}=(x+p)^2-p^2+\sqrt{2}$이므로

꼭짓점 $\mathrm{A}(-p, -p^2+\sqrt{2})$

$y=-x^2+2px+\sqrt{2}=-(x-p)^2+p^2+\sqrt{2}$이므로

꼭짓점 $\mathrm{B}(p, p^2+\sqrt{2})$

$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$이므로

($\overline{\mathrm{OA}}$의 기울기)×($\overline{\mathrm{OB}}$의 기울기)$=-1$

$\frac{-p^2+\sqrt{2}}{-p}\times\frac{p^2+\sqrt{2}}{p}=-1$에서

$-p^4+2=p^2$, $p^4+p^2-2=0$이므로 $p^2=1$

$\therefore p=\pm1$

04 $f(x)=ax^2$의 그래프가 (1, 3)을 지나므로 $a=3$

$g(x)=3x^2+bx+c$에서 대칭축 $x=-\frac{b}{6}=2$이므로

$b=-12$

$g(x)=3x^2-12x+c$에서 $x=2$를 대입하면

$12-24+c=5$이므로 $c=17$

$\therefore a=3$, $b=-12$, $c=17$

05 이차함수의 식을 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(0)=c$이므로 $0<c<2$ $\cdots$ ㉠

$f(1)=a+b+c$이므로 $2<a+b+c<4$ $\cdots$ ㉡

$f(2)=4a+2b+c$이므로 $4<4a+2b+c<6$ $\cdots$ ㉢

㉢−㉡을 하면 $0<3a+b<4$ $\cdots$ ㉣

3×㉣+㉠에서 $0<3(3a+b)+c<14$이므로 $0<f(3)<14$

06 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{1}{2}(0-2)^2+3=5 \qquad \therefore \mathrm{P}(0,\ 5)$

점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=5$

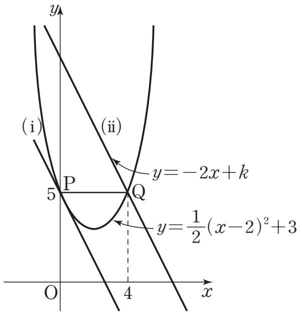
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$의 그래프와 직선 $y=5$의 교점의 좌표는

$5=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$, $x-2=\pm2$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore \mathrm{Q}(4,\ 5)$

$y=-2x+k$의 그래프의 y절편이 k이므로 오른쪽 그림에서 k의 값은 $y=-2x+k$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$를 지날 때 최소가 되고 점 $\mathrm{Q}(4,\ 5)$를 지날 때 최대가 된다.



(i) 직선 $y=-2x+k$가 점 $\mathrm{P}(0,\ 5)$를 지나면 $k=5$

(ii) 직선 $y=-2x+k$가 점 $\mathrm{Q}(4,\ 5)$를 지나면

$5=-2\times4+k$, $k=13$

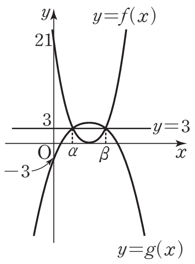
따라서 (i), (ii)에 의해 k의 값의 범위는 $5\le k\le13$

07 두 이차함수의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점의 x좌표를 α와 β라 하면 다음이 성립한다.

$f(x)-3=a(x-\alpha)(x-\beta)$,

$g(x)-3=-3(x-\alpha)(x-\beta)$

두 함수 $y=f(x)-3$, $y=g(x)-3$의 y절편은 각각 18, -6이다.



따라서 $18=a\alpha\beta$, $-6=-3\alpha\beta$이므로

$a=\frac{18}{\alpha\beta}=\frac{18}{2}=9$이다.

08 $\mathrm{A}(a,\ 8a^2+5)$이고, 점 D의 y좌표도 $8a^2+5$이므로

$8a^2+5=2x^2+5$에서 $x=2a$

$\therefore \mathrm{D}(2a,\ 8a^2+5)$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$

점 B의 x좌표가 a이므로 $\mathrm{B}(a,\ 2a^2+5)$

$\overline{\mathrm{AB}}=8a^2+5-(2a^2+5)=6a^2=a \qquad \therefore a=\frac{1}{6}(\because a\neq0)$

따라서 점 C의 좌표는 $(2a,\ 2a^2+5)$이므로

$\mathrm{C}\left(\frac{1}{3},\ \frac{91}{18}\right)$

09 $f(x^2-5x-8)=3+3+3+3$

$=f(2)+f(2)+f(2)+f(2)=f(2^4)$

$x^2-5x-8=16$에서 $(x-8)(x+3)=0$

$\therefore x>0$이므로 $x=8$

$f\left(\frac{4}{y^2-3y+24}\right)=-12$에서

$f(4)-f(y^2-3y+24)=-f(2^4)$

$f(y^2-3y+24)=f(16)+f(4)=f(64)$

$y^2-3y+24=64$에서 $(y-8)(y+5)=0$

$\therefore y>0$이므로 $y=8$

$\therefore x+y=16$

10 세 점 $(-3,\ 0)$, $(-1,\ -2)$, $(1,\ 0)$을 지나는 $f(x)$의 식을 구하면 $y=\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$

$f(x)=t$라 하면 $f(t)=0$일 때의 $t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $f(x)=-3$일 때, $f(x)$의 최솟값은 -2이므로 $f(x)=-3$을 만족시키는 x의 값은 없다.

(ii) $f(x)=1$일 때, $\frac{1}{2}(x+3)(x-1)=1$, $x^2+2x-5=0$,

$x=-1\pm\sqrt{6}$

$\therefore$ 두 근의 합은 -2이다.

11 $f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)$, $g(x)=-(x-\alpha)(x-\gamma)$

$h(x)=f(x)+g(x)$

$=-2x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x-\alpha\beta-\alpha\gamma$

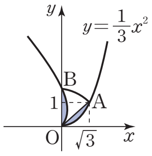
$=-2\left(x-\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)^2+\frac{(2\alpha+\beta+\gamma)^2}{8}-\alpha\beta-\alpha\gamma$

$h(x)$의 최고차항의 계수가 $-2<0$이므로 $h(x)$의 그래프는 위로 볼록한 포물선 모양이고 $h(x)$의 최댓값은 꼭짓점 좌표의 y좌표와 같다.

따라서 $x=\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{4}$에서 최댓값을 갖는다.

12 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.

즉, 구하고자 하는 넓이는 부채꼴 AOB의 넓이와 같다.



$\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 1)$이므로 피타고라스정리에 의해

$\overline{\mathrm{OA}}=2$이고 $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$이므로

(색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times2^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{2}{3}\pi$

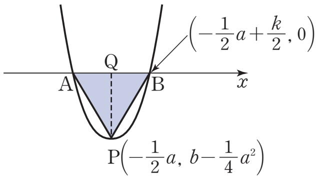
13 $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2+b-\frac{1}{4}a^2$이므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}a,\ b-\frac{1}{4}a^2\right)$,

점 P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}a,\ 0\right)$

$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}k\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2$

이므로 $k=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PQ}}$ ⋯ ㉠



$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{k}{2}$이므로

$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}a+\frac{k}{2},\ 0\right)$이고,

주어진 이차함수의 식에 대입하여 정리하면

$\frac{1}{4}k^2=\frac{1}{4}a^2-b,\ k^2=4\left(\frac{1}{4}a^2-b\right)=4\overline{\mathrm{PQ}}$

$k=2\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}}\ (\because k>0)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}}$이고,

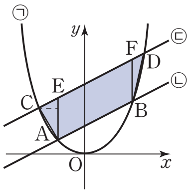
양변을 제곱하면 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=3\overline{\mathrm{PQ}}$,

$\overline{\mathrm{PQ}}(\overline{\mathrm{PQ}}-3)=0$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=3$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{4}a^2-b=3$이므로 $a^2-4b=12$

14 $y=\frac{1}{2}x^2$ ⋯ ㉠, $y=\frac{1}{2}x+3$ ⋯ ㉡,

$y=\frac{1}{2}x+6$ ⋯ ㉢



㉠, ㉡에서 $x^2=x+6$,

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2$ 또는 $x=3$ $\quad\therefore \mathrm{A}(-2,\ 2),\ \mathrm{B}\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

㉠, ㉢에서 $x^2=x+12,\ (x+3)(x-4)=0$

$x=-3$ 또는 $x=4$ $\quad\therefore \mathrm{C}\left(-3,\ \frac{9}{2}\right),\ \mathrm{D}(4,\ 8)$

x축에 수직인 직선이 A를 지나 $\overline{\mathrm{CD}}$와 만나는 점을 E,

B를 지나 $\overline{\mathrm{CD}}$와 만나는 점을 F라 하면

□CABD

$=\triangle\mathrm{CAE}+\square\mathrm{EABF}+\triangle\mathrm{FBD}$

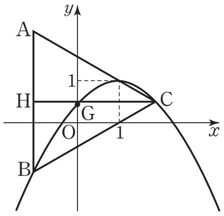
$=3\times\{(-2)-(-3)\}\times\frac{1}{2}+3\times\{3-(-2)\}$

$+3\times(4-3)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}+15+\frac{3}{2}=18$

15 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{CH}}=3$

또, 점 G가 △ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{CG}}:\overline{\mathrm{GH}}=2:1$



즉 점 C의 x좌표는 2이고 점 H의 x좌표는 -1이므로

점 B의 x좌표도 -1이다.

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로

주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+1$이라고 하자.

$y=a(x-1)^2+1$에 $x=2$를 대입하면

$y=a+1$ $\quad\therefore \mathrm{C}(2,\ a+1)$

$y=a(x-1)^2+1$에 $x=-1$을 대입하면

$y=4a+1$ $\quad\therefore \mathrm{B}(-1,\ 4a+1)$

이때 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(-1,\ a+1)$이고 $\overline{\mathrm{HB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$a+1-(4a+1)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3},\ -3a=\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 점 G의 좌표는 $\left(0,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

16 모든 경우의 수는 36

$y=-x^2+2(a-b)x-9$

$\ =-\{x-(a-b)\}^2+(a-b)^2-9$

의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고

꼭짓점 좌표는 $(a-b,\ (a-b)^2-9)$이다.

이 그래프가 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로

$(a-b)^2-9<0,\ (a-b)^2<9$ $\quad\therefore -3<a-b<3$

(i) $a-b=-2$일 때, $(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)$의 4개

(ii) $a-b=-1$일 때,

$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)$의 5개

(iii) $a-b=0$일 때,

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 6개

(iv) $a-b=1$일 때,

$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$의 5개

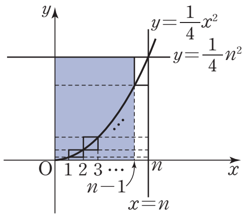
(v) $a-b=2$일 때,

$(3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)$의 4개

(i)~(v)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+5+6+5+4=24$(개)

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$



17 오른쪽 그림과 같이 n개의 계단 형태로 나열된 직사각형을 가장 오른쪽에 있는 직사각형 아래로 모두 밀어 보내면 가로의 길이가 $n-(n-1)=1$, 세로의 길이가 $\frac{1}{4}n^2$인 직사각형이 된다.

따라서 두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{4}n^2$과 x축, y축으로 둘러싸인 직사각형에서 넓이가 $\frac{1}{4}n^2$인 도형을 제외한 부분의 넓이는 가로의 길이가 $n-1$, 세로의 길이가 $\frac{1}{4}n^2$인 직사각형의 넓이와 같으므로

$(n-1)\times\frac{1}{4}n^2=225$, $n^2(n-1)=900=10^2\times 9$

$\therefore n=10$

18 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}$이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-4x+3=\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}$(㉠)이 중근을 갖는다.

㉠을 정리하면 $4x^2-(16+m)x+25=0$이고,
중근을 가지므로 $(16+m)^2-4\times4\times25=0$
$\therefore m=4(\because m>0)$

따라서 $4x^2-20x+25=0$, $x=\frac{5}{2}$이므로 $y=-\frac{3}{4}$

$\therefore$ 교점 P의 좌표 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

직선 $4x-4y-13=0$을 x축, y축 방향으로 1, -1만큼 평행이동하면 $4(x-1)-4(y+1)-13=0$에서 $y=x-\frac{21}{4}$이고, 직선 $y=ax-\frac{1}{4}$과 수직이므로 $a=-1$

직선 $y=x-\frac{21}{4}$과 $y=-x-\frac{1}{4}$과의 교점의 좌표를 구하면 $x-\frac{21}{4}=-x-\frac{1}{4}$에서 $x=\frac{5}{2}$이므로 $y=-\frac{11}{4}$

즉 Q의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $\left|-\frac{3}{4}-\left(-\frac{11}{4}\right)\right|=2$

2 이차함수의 활용

핵심 문제 01

118쪽

1 (1) ㄱ, ㅁ (2) ㄷ, ㅂ **2** $\frac{9}{4}$ **3** $k<-\frac{1}{3}$

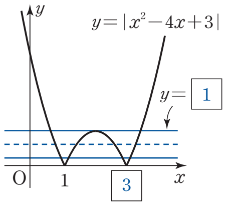
4 0, 1/1, 3 **5** $y=2x-\frac{5}{3}$

1 우변의 이차식 ax^2+bx+c에서 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 교점의 개수가 결정된다.
교점 2개$(D>0)$: ㄱ, ㅁ 교점 1개$(D=0)$: ㄴ, ㄹ
교점 0개$(D<0)$: ㄷ, ㅂ

2 이차함수 $y=x^2+3x+m$의 그래프와 직선 $y=0$(x축)에 접하기 위한 조건은 $D=3^2-4\times1\times m=0$이다.

$\therefore m=\frac{9}{4}$

3 $-3x^2+3x+k-2=-x-1$,
$3x^2-4x-k+1=0$
교점이 없으므로 $D=4^2-12(-k+1)<0$
$\therefore k<-\frac{1}{3}$



4 $|x^2-4x+3|$
$=|(x-3)(x-1)|=0$이므로
$y=|x^2-4x+3|$과 x축과의 교점은
$(1, 0)$, $(3, 0)$이다.
$x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로
$1\le x\le 3$일 때,
$0\le|x^2-4x+3|\le 1$이다.
즉, 방정식 $|x^2-4x+3|=k$가 서로 다른 4개의 근을 갖지 위한 k의 값의 범위는 $0<k<1$이다.

5 $3x^2-6x+5=0$에서 $x^2=2x-\frac{5}{3}$

따라서 $y=x^2$외에 필요한 일차함수의 식은 $y=2x-\frac{5}{3}$

응용 문제 01

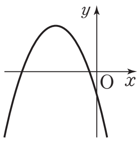
119쪽

예제 ① $2m$, 4, 4, 24, 1 / 1

1 ④ **2** (1) A$(-2, 8)$, B$(3, 18)$ (2) $5\sqrt{5}$

3 10 **4** ⑤

1 오른쪽 그래프에서 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 a와 b의 부호는 같다. $b<0$
y절편이 양수가 아니므로 $c\le 0$
또한 x절편이 2개이므로 $b^2-4ac>0$



2 (1) $2x^2=2x+12$, $x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$
$\therefore \mathrm{A}(-2, 8)$, $\mathrm{B}(3, 18)$
(2) 선분 AB의 길이는
$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(18-8)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

3 $x^2-4nx+4n^2=2(x+1)-k$
$x^2-2(2n+1)x+4n^2-2+k=0$ ⋯ ㉠
㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
㉠에서 $\{-2(2n+1)\}^2-4(4n^2-2+k)>0$
$\therefore k<4n+3$
(i) $n=1$이면 $k<7$이므로 $f(1)=6$
(ii) $n=2$이면 $k<11$이므로 $f(2)=10$
(iii) $n=3$이면 $k<15$이므로 $f(3)=14$
$\therefore f(1)-f(2)+f(3)=6-10+14=10$

4 $x^2+3ax+40=-ax^2+4b^2$
$x^2+4ax-4b^2+40=0$ ⋯ ㉠
㉠에서 $(4a)^2-4(-4b^2+40)<0$
$16a^2+16b^2-160<0 \qquad \therefore a^2+b^2<10$
따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 4개이다.

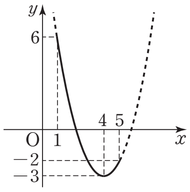
핵심 문제 02

120쪽

1 2
2 3
3 $a\ge 5$
4 -3
5 -2
6 -4

1 $y=-x^2-4x-m+2=-(x+2)^2-m+6$
$x=-2$일 때, 최댓값 $-m+6$을 갖는다.
또, 이 함수의 y의 값의 범위가 $y\le 4$이므로 최댓값이 4이다.
$-m+6=4 \qquad \therefore m=2$

2 $y=x^2-8x+13=(x-4)^2-3$
$x=1$일 때, $y=6$
$x=5$일 때, $y=-2$
오른쪽 그림에서
$x=1$일 때 최댓값 $M=6$
$x=4$일 때 최솟값 $m=-3$
$\therefore M+m=3$



3 $x=1$일 때, 최솟값이 -5이므로 이차함수의 식은
$y=a(x-1)^2-5=ax^2-2ax+a-5$
이 그래프가 최솟값을 가지므로 아래로 볼록하다.
$\therefore a>0$ ⋯ ㉠
제3사분면을 지나지 않으므로 (y절편)$=a-5\ge 0$
$\therefore a\ge 5$ ⋯ ㉡
따라서 ㉠, ㉡의 공통범위는 $a\ge 5$

4 주어진 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y=(x+3+k)^2-k^2-6k+2$
이 함수의 최솟값이 11이므로
$-k^2-6k+2=11$, $k^2+6k+9=0$, $(k+3)^2=0$
$\therefore k=-3$

5 $y=ax^2+4ax+4a+4=a(x+2)^2+4$
$-1\le x\le 1$이므로 $x=1$일 때, 최솟값 -50을 갖는다.
$f(1)=9a+4=-50 \qquad \therefore a=-6$
$\therefore f(x)=-6(x+2)^2+4$
따라서 최댓값 $k=f(-1)=-6\times 1^2+4=-2$

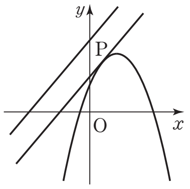
6 $y=-x^2+kx-2k=-\left(x-\dfrac{1}{2}k\right)^2+\dfrac{1}{4}k^2-2k$
$x=\dfrac{1}{2}k$일 때, $y=\dfrac{1}{4}k^2-2k$
$M=\dfrac{1}{4}k^2-2k=\dfrac{1}{4}(k^2-8k+16-16)=\dfrac{1}{4}(k-4)^2-4$
따라서 $k=4$일 때, M의 최솟값은 -4이다.

응용 문제 02

121쪽

예제 ② 3, 18, -18, 3, 18, 36 / 36
1 P(1, 4)
2 -3, -1
3 100
4 $2\sqrt{3}$
5 158
6 40명

1 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+8$에 평행하고 포물선에 접하는 직선 위에 점 P가 있을 때, 점 P에서 직선 $y=x+8$에 이르는 거리가 가장 짧다.



포물선에 접하는 직선을 $y=x+k$라 하면

$-x^2+3x+2=x+k$

$x^2-2x+k-2=0$ ⋯ ㉠

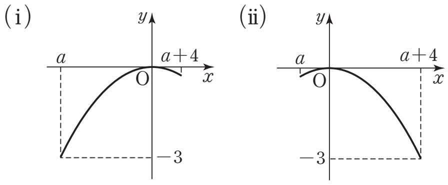
㉠은 중근을 가져야 하므로 $(-2)^2-4(k-2)=0$

$\therefore k=3$

㉠에 $k=3$을 대입하여 풀면 $x=1$, $y=x+3$에 $x=1$을 대입하면 $y=4$

$\therefore \mathrm{P}(1, 4)$

2 y의 값의 범위가 $-3\le y\le 0$인 경우는 다음 그림과 같이 2가지 경우가 있다.



(i)에서 점 $(a, -3)$을 지나므로 $-\frac{1}{3}a^2=-3$, $a^2=9$

$\therefore a=-3(\because a<0)$

(ii)에서 점 $(a+4, -3)$을 지나므로 $-\frac{1}{3}(a+4)^2=-3$

$(a+4)^2=9$, $a+4=3(\because a+4>0)$ $\quad\therefore a=-1$

3 직사각형의 세로의 길이를 a m, 넓이를 y m^{2}라 하면

$2x+a\pi=400$, $a=\frac{400-2x}{\pi}$이므로

$y=ax=-\frac{2}{\pi}(x^2-200x)=-\frac{2}{\pi}(x-100)^2+\frac{20000}{\pi}$

따라서 최댓값 $\frac{20000}{\pi}$을 가지고 이때의 x의 값은 100이다.

4 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $x^2+ax+2a-7=0$의 근이므로 $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8a+28}}{2}$

(두 교점 사이의 거리)

$=\frac{-a+\sqrt{a^2-8a+28}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-8a+28}}{2}$

$=\sqrt{a^2-8a+28}=\sqrt{(a-4)^2+12}$

따라서 $a=4$일 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

5 이차방정식 $x^2-81x+k=0$의 두 근을 α, β(α, β는 소수)라 하면 $\alpha+\beta=81$, $\alpha\beta=k$

한편, 81을 두 자연수의 합으로 나타내면 항상 두 수 중 한 수는 짝수이므로 소수인 두 수는 79, 2가 될 수 밖에 없다.

$\therefore k=\alpha\beta=79\times2=158$

$y=x^2-2kx+159k=(x-k)^2-k^2+159k$

이므로 $x=k$일 때, 최솟값은

$-k^2+159k=k(159-k)=158(159-158)=158$

6 신규 회원 수를 x명, 총 회비를 y원이라 하면

$y=(20+x)(60000-1000x)$

$\quad=-1000(x-20)^2+1600000$

신규 회원수가 20명 즉, 전체 회원 수가 40명일 때, 총 회비는 160만 원으로 최대가 된다.

심화 문제

122~127쪽

01 $3<k<5$
02 3
03 -12
04 ±2
05 5개
06 -12
07 $1<k<3$
08 $16\sqrt{2}$
09 $(-3, -3)$
10 18 m^2
11 18
12 7.5 m
13 $d<\alpha<a<b<\beta<c$
14 6
15 $2\sqrt{5}$ cm
16 2, 8, 18
17 3
18 Q$(-1, 1)$

01 이차함수 $y=x^2-2kx+8k-15$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 $(-2k)^2-4(8k-15)<0$이고,

$4k^2-32k+60=4(k^2-8k+15)=4(k-5)(k-3)<0$

$\therefore 3<k<5$

02 분모가 양수인 최솟값을 가질 때, 주어진 함수는 최댓값을 갖는다. 즉, $2x^2+4x+a=2(x+1)^2+a-2$에서 최솟값은 $a-2$이므로 $\frac{4}{a-2}=4$ $\quad\therefore a=3$

03 교점의 좌표를 이차함수에 대입하면

$0=(4+2\sqrt{5})^2+m(4+2\sqrt{5})+n$에서

$(36+4m+n)+(16+2m)\sqrt{5}=0$이므로

$36+4m+n=0$, $16+2m=0$에서 $m=-8$, $n=-4$

$\therefore m+n=-12$

04 $y=3x^2+kx-1$이 x축과 만나는 두 점이 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이고, $\alpha<\beta$라 하면

α, β는 $3x^2+kx-1=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=-\frac{k}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$이다.

또한, x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\frac{4}{3}$이므로

$\frac{4}{3}=\beta-\alpha$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$이므로

$\frac{16}{9}=\left(-\frac{k}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{k^2}{9}+\frac{4}{3}$

$\frac{k^2}{9}=\frac{4}{9}$에서 $k^2=4$이므로 $k=\pm2$

05 $f(x)g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$은 "$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 또는 $f(x)-g(x)=0$"과 같다.

방정식 $f(x)=0$의 해는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편(x축과의 교점의 x좌표) 1개이고, 방정식 $g(x)=0$의 해는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 x절편 2개이며, 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 해는 두 그래프의 두 교점의 x좌표는 2개이다.

따라서 이 해들은 모두 서로 다르므로 구하는 값은 5이다.

06 $y=x^2$, $y=mx+n$의 두 교점의 x좌표는 $x^2-mx-n=0$의 두 근이므로 $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=-n$ ⋯ ㉠

x_1+x_2, x_1x_2를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$6x^2-12x-1=0$이고 ㉠에 의해서

$x^2-(m-n)x-mn=6x^2-12x-1$

$m-n=2$, $mn=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore \frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}=-12$

07 $y=kx$와 $y=x^2-x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$x^2-(k+1)x+1=0$에서

$(k+1)^2-4>0$, $(k+3)(k-1)>0$이므로

$k<-3$ 또는 $k>1$ ⋯ ㉠

$y=kx$와 $y=x^2+x+1$이 만나지 않으므로

$x^2+(1-k)x+1=0$에서 $(1-k)^2-4<0$,

$(k+1)(k-3)<0$이므로 $-1<k<3$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $1<k<3$

08 $\frac{1}{4}x^2=x+1$에서 $x=2\pm2\sqrt{2}$이므로

$\mathrm{A}(2-2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(2+2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$

□ACDB

$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}$

$=\frac{1}{2}\times(4-2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2})\times\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\}$

$=16\sqrt{2}$

09 $f(x)=(x+4)(x+3)=x^2+7x+12$

$g(x)=(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$

$h(x)=(x+4)(x+1)=x^2+5x+4$

$\therefore f(x)+g(x)+h(x)$

$=x^2+7x+12+x^2+6x+8+x^2+5x+4$

$=3x^3+18x+24$

$=3(x+3)^2-3$

따라서 이차함수 $y=f(x)+g(x)+h(x)$의 그래프로 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -3)$이다.

10 세로의 길이를 xm라 하면 가로의 길이는 $(12-2x)$m이므로

(울타리 내부의 넓이)$=x(12-2x)=-2(x-3)^2+18$

따라서 울타리 내부의 최대 넓이는 18 m^{2}이다.

11 $f(x)=ax^2+bx+c$는 $x=1$에서 최댓값이 16이므로

$f(x)=a(x-1)^2+16(a<0)$

$f(x)=0$에서 $x=1\pm\frac{4}{\sqrt{-a}}$이므로

x축과 만나는 두 점 사이의 거리는

$\left(1+\frac{4}{\sqrt{-a}}\right)-\left(1-\frac{4}{\sqrt{-a}}\right)=8$에서 $\frac{8}{\sqrt{-a}}=8$이므로

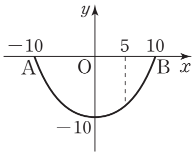
$a=-1$

$f(x)=-(x-1)^2+16=-x^2+2x+15$이므로

$a=-1$, $b=2$, $c=15$

$\therefore 1+2+15=18$

12 수로의 단면을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



꼭짓점이 $(0,\ -10)$이므로 포물선의 식을 $y=ax^2-10$이라 하고

$\mathrm{B}(10,\ 0)$을 대입하면

$0=a\times10^2-10$이므로 $a=\frac{1}{10}$, $y=\frac{1}{10}x^2-10$

따라서 폭의 중앙으로부터 5 m 떨어진 지점의 깊이는

$y=\frac{1}{10}\times5^2-10=-7.5$ $\quad\therefore$ 7.5 m

13 $f(x)=(x-a)(x-c)+(x-b)(x-d)$

에서 $d<a<b<c$이므로

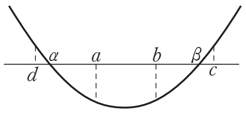
$f(a)=(a-b)(a-d)<0$

$f(b)=(b-a)(b-c)<0$

$f(c)=(c-b)(c-d)>0$

$(d)=(d-a)(d-c)>0$

위의 결과를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore d<\alpha<a<b<\beta<c$

14 $\overline{\mathrm{EF}}=x$, $\overline{\mathrm{BF}}=y$라 하면 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{AFE}$이므로

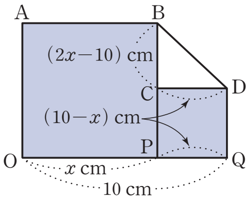
$6:4=(6-y):x$

$4(6-y)=6x$에서 $y=-\frac{3}{2}x+6$

($\square$BDEF의 넓이)$=xy=-\frac{3}{2}x^2+6x=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$

따라서 $\square$BDEF의 넓이의 최댓값은 6이다.

15 오른쪽 그림과 같이



$\overline{OP}=x(\text{cm})$라고 하면

$\overline{PQ}=10-x(\text{cm})$,

$\overline{BC}=x-(10-x)$

$=2x-10(\text{cm})$

이므로 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{BD}=\sqrt{(2x-10)^2+(10-x)^2}$

$=\sqrt{5x^2-60x+200}$

$=\sqrt{5(x-6)^2+20}$

따라서 $x=6$일 때, $\overline{BD}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ cm이다.

16 $0=\frac{1}{2}x^2-k$, $x^2=2k$이므로 $x=\pm\sqrt{2k}$이다.

두 점 A, B 사이의 거리 $2\sqrt{2k}=$(자연수)이려면

$2k=m^2$(m은 자연수)이어야 한다.

$0<k<20$인 자연수이므로 $0<2k=m^2<40$이다.

즉, 2의 배수인 완전제곱수 m^2은 4, 16, 36이므로

$k=2$, 8, 18이다.

17 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

$\triangle ACD : \triangle BCD=\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{A'O}:\overline{B'O}=1:3$이므로

$A'(-t, 0)$, $B'(3t, 0)(t>0)$이라 하면

$A(-t, t^2)$, $B(3t, 9t^2)$

점 A, B는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

(기울기)$=\frac{9t^2-t^2}{3t-(-t)}=2$

즉, $\frac{8t^2}{4t}=2$ $\quad\therefore t=1$

$A(-1, 1)$을 $y=2x+k$에 대입하면 $k=3$

18 $\triangle AOP$와 $\triangle QOP$에서 밑변 OP가 공통이므로 넓이가 같으려면 높이가 같아야 한다.

즉, $\overline{OP}\,/\!/\,\overline{QA}$이면 되므로

(직선 QA의 기울기)=(직선 OP의 기울기)이다.

$Q(a, a^2)(a<0)$라 하면 $P(2, 2)$, $A(2, 4)$이므로

$\frac{4-a^2}{2-a}=\frac{2-0}{2-0}$이다.

즉, $4-a^2=2-a$, $a^2-a-2=0$, $(a-2)(a+1)=0$

$\therefore a=-1(\because a<0)$

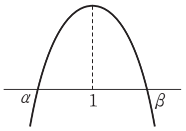
$\therefore Q(-1, 1)$

최상위 문제

128~133쪽

01	$-\frac{2}{9}<m<0$	**02**	$-2<a<0$	**03**	$0\le k<\frac{1}{3}$	**04**	4
05	-7	**06**	8	**07**	$\frac{9}{5}$	**08**	320
09	9	**10**	$\frac{11}{4}$	**11**	$\frac{69}{4}$	**12**	114
13	$-1<a<0$	**14**	$5:3$	**15**	2초 후	**16**	25
17	최솟값 : $-\frac{21}{4}$, 최댓값 : $\frac{25}{9}$	**18**	$y=3x+1$				

01 (i) $m<0$일때



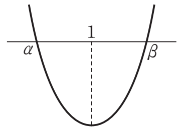
$a<x<b$에서 $f(x)>0$

$\therefore f(1)>0$

즉, $m+(m+2)+7m>0$

$\therefore -\frac{2}{9}<m<0$

(ii) $m>0$일때



$a<x<b$에서 $f(x)<0$

$\therefore f(1)<0$

즉, $m+(m+2)+7m<0$

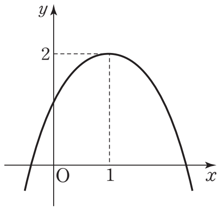
$\therefore m<-\frac{2}{9}$

➡ $m>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 m의 값의 범위는 $-\frac{2}{9}<m<0$

02 $y=ax^2-2ax+a+2$

$=a(x^2-2x+1-1)+a+2=a(x-1)^2+2$



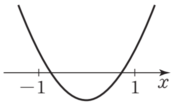
꼭짓점의 좌표가 $(1, 2)$이고

제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지나야 하므로 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같아야 한다.

위로 볼록하므로 $a<0$이고,

(y절편)$=a+2>0$이므로 $-2<a<0$이다.

03 $f(x)=x^2-2kx-k$라 하면



$f(-1)=1+k>0$이므로

$k>-1$ ⋯ ㉠

$f(1)=1-3k>0$이므로 $k<\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡

대칭축 $x=k$에서 $-1<k<1$ ⋯ ㉢

또한, $x^2-2kx-k=0$이 실근을 가지므로

$k^2+k\ge0$에서 $k\ge0$ 또는 $k\le-1$ ⋯ ㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의해서 $0\le k<\frac{1}{3}$

04 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0$에서 $\alpha+\beta=-a-1$, $\alpha\beta=a^2-1$

또한, 실근을 가지므로 $(a+1)^2-4(a^2-1)\geq 0$에서

$-1\leq a\leq\frac{5}{3}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(a+1)^2-2(a^2-1)$

$=-(a-1)^2+4$

따라서 $a=1$일 때, 최댓값은 4, $a=-1$일 때, 최솟값은 0

$\therefore 4+0=4$

05 $y=x^2+ax$, $y=x^2+bx$에 $y=mx+n$이 접하므로

$x^2+(a-m)x-n=0$에서 $D=(a-m)^2+4n=0$ ⋯ ㉠

$x^2+(b-m)x-n=0$에서 $D=(b-m)^2+4n=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $(a-m)^2=(b-m)^2$이고,

$a\neq b$이므로 $a-m=-(b-m)$ $\quad\therefore m=\frac{a+b}{2}$

$-5\leq a\leq -1$, $1\leq b\leq 8$에서 $-4\leq a+b\leq 7$이므로

$-2\leq m\leq\frac{7}{2}$

$\therefore pq=(-2)\times\frac{7}{2}=-7$

06 $2x^2+y^2=4x$에서 $y^2=4x-2x^2$

$y^2\geq 0$이므로 $4x-2x^2\geq 0$에서 $0\leq x\leq 2$

$x^2+y^2-x+1=-x^2+3x+1=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $x=\frac{3}{2}$일 때, $M=\frac{13}{4}$, $x=0$일 때, $m=1$이므로

$4M-5m=8$

07 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동하면

$y=x^2-2ax-4x+a^2+4a+7+b$

$y=2x+1$과 한 점에서 만나므로

$x^2-2(a+3)x+a^2+4a+6+b=0$에서

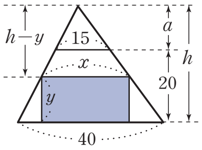
$D=\{-2(a+3)\}^2-4(a^2+4a+6+b)=0$이므로

$2a+3-b=0$ $\quad\therefore b=2a+3$

따라서 $l^2=a^2+b^2=a^2+(2a+3)^2=5\left(a+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$

이므로 $a=-\frac{6}{5}$일 때, 최솟값은 $\frac{9}{5}$

08 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면



$15:a=40:(a+20)$에서

$a=12$, $h=32$

또한 $x:(h-y)=40:h$에서 $y=32-\frac{4}{5}x$

(직사각형의 넓이)$=xy=x\left(32-\frac{4}{5}x\right)$

$=-\frac{4}{5}(x-20)^2+320$

따라서 $x=20$일 때, 직사각형의 최대 넓이는 320이다.

09 두 정사각형 ABCD, EFGB의 대각선의 길이를 각각 x, y라 하면 $x+y=6$

두 정사각형 넓이의 합을 S라 하면

$S=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\{x^2+(6-x)^2\}=(x-3)^2+9$

따라서 $0<x<6$이므로 $x=3$일 때, 최솟값은 9

10 점 P의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+1)$이라 하면

점 Q의 y좌표도 a^2-2a+1이므로

$a^2-2a+1=-x-2$에서 $x=-a^2+2a-3$

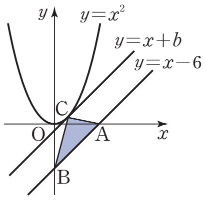
따라서 점 Q의 좌표는 $(-a^2+2a-3,\ a^2-2a+1)$

$\overline{\text{PQ}}=a+a^2-2a+3=a^2-a+3=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때, $\overline{\text{PQ}}$의 최소 길이는 $\frac{11}{4}$이다.

11 직선 $y=x-6$을 평행이동하여 $y=x^2$과 접하는 점이 C가 될 때, △ABC의 넓이는 최솟값을 갖는다.

직선 $y=x+b$가 $y=x^2$과 접한다고 하면



$x^2=x+b$가 중근을 가져야 하므로 $b=-\frac{1}{4}$

점 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 C′이라 하면 평행선과 넓이의 성질에 의해서

$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{ABC}'=\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{1}{4}-(-6)\right\}\times 6=\frac{69}{4}$

따라서 △ABC의 넓이의 최솟값은 $\frac{69}{4}$이다.

12 $f(x)\leq 149$이면 다음이 성립한다.

$x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1\leq 149$,

즉 $|x-1|\leq\sqrt{150-a}$

그런데 $f(x)\leq 149$이면 $-9\leq x\leq 7$,

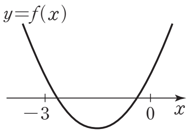
즉 $-10\leq x-1\leq 6$이 성립해야 하므로

$\sqrt{150-a}\leq 6$이어야 한다.

그러므로 $150-a\leq 36$, $a\geq 114$

따라서 구하는 최솟값은 114이다.

13 $(x+1)^2=1-x$에서 $x(x+3)=0$



$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$

$f(x)=x^2-3ax+x+2a^2-a$라 하면

$f(0)=2a^2-a>0$에서 $a>\frac{1}{2}$ 또는 $a<0$ ⋯ ㉠

$f(-3)=2a^2+8a+6>0$에서 $a>-1$ 또는 $a<-3$ ⋯ ㉡

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{3a-1}{2}$이므로

$-3<\dfrac{3a-1}{2}<0$에서 $-\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{1}{3}$ ⋯ ㉢

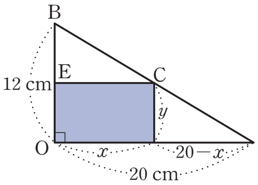
또한, 근을 가지므로 $f(x)$에서

$D=(3a-1)^2-4(2a^2-a)$

$\quad=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$ ⋯ ㉣

따라서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의해 $-1<a<0$

14 $\overline{\text{OD}}$와 $\overline{\text{DC}}$의 각각 x cm, y cm 라 하자



$\overline{\text{BO}}\,/\!/\,\overline{\text{CD}}$이므로

$\triangle\text{ABO} \backsim \triangle\text{ACD}$

$20:12=(20-x):y$

즉, $5:3=(20-x):y$, $5y=60-3x$

$\therefore y=-\dfrac{3}{5}x+12$

(직사각형의 넓이)$=xy=x\left(-\dfrac{3}{5}x+12\right)$

$$=-\frac{3}{5}x^2+12x$$

$$=-\frac{3}{5}(x^2-20x+100-100)$$

$$=-\frac{3}{5}(x-10)^2+60$$

$x=10$일 때, 직사각형의 최대 넓이는 60 cm^2이다.

즉, $y=-\dfrac{3}{5}\times 10+12=6$

$\therefore$ $\overline{\text{OD}}$의 길이는 10, $\overline{\text{DC}}$의 길이는 6이므로
$\overline{\text{OD}}:\overline{\text{DC}}=5:3$이다.

15 t초 후 점 P의 x좌표는 $12-2t$,
점 Q의 좌표는 $6+3t$이다. $(0<t\leq 6)$

$\triangle\text{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}=\dfrac{1}{2}(12-2t)(6+3t)$

$$=\frac{1}{2}(-6t^2+24t+72)=-3t^2+12t+36$$

$$=-3(t-2)^2+48\ (0<t\leq 6)$$

$t=2$일 때, $\triangle\text{OPQ}$의 넓이는 최대 48 cm^2가 된다.

$\therefore$ 2초 후

16 $f(x)=-3x^2+bx+c$의 그래프가 두 점 A, B를 지나므로
$b=6$, $c=26$

또, $g(x)=ax^2+2x+2$의 그래프가 두 점 A, B를 지나므로
$a=1$

y축에 평행하고 선분 AB와 만나는 직선을 $x=k$라 하면
$-2<k<3$이다.

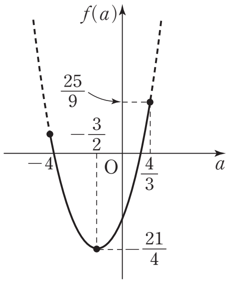
$\text{P}(k,\ -3k^2+6k+26)$, $\text{Q}(k,\ k^2+2k+2)$이므로

$\overline{\text{PQ}}=-3k^2+6k+26-(k^2+2k+2)$

$$=-4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+25$$

$\therefore$ $k=\dfrac{1}{2}$일 때, 최댓값은 25

17 $x^2-ax+(1+a)^2-5=0$



$x^2-ax+a^2+2a-4=0$ ⋯ ㉠

㉠에서 $p+q=a$, $pq=a^2+2a-4$

$(1+p)(1+q)$

$=1+(p+q)+pq$

$=1+a+a^2+2a-4$

$=a^2+3a-3$

$=\left(a^2+3a+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}\right)-3$

$=\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$

$f(a)=\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$ ⋯ ㉡이라 하자.

이때 ㉠은 두 실근을 가지므로

$a^2-4(a^2+2a-4)\geq 0$

$3a^2+8a-16\leq 0$

$(3a-4)(a+4)\leq 0$

$\therefore -4\leq a\leq\dfrac{4}{3}$

$-4\leq a\leq\dfrac{4}{3}$의 범위에서 ㉡의 최댓값과 최솟값을 각각 구하면

$a=-\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 : $-\dfrac{21}{4}$, $a=\dfrac{4}{3}$일 때 최댓값 : $\dfrac{25}{9}$

18 직선 PQ의 기울기를 m이라 하면 점 $(2,\ 7)$을 지나므로
직선 PQ의 방정식은

$y-7=m(x-2)\qquad\therefore y=mx-2m+7$

포물선 $y=x^2$, 직선 $y=mx-2m+7$의 교점의 x좌표를
α, β라 할 때, α, β는 방정식 $x^2=mx-2m+7$,
즉 $x^2-mx+2m-7=0$ ⋯ ㉠의 근이다.

점 $\text{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\text{Q}(\beta,\ \beta^2)$이고 직선 PO와 QO의 기울기는
각각 $\dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$, $\dfrac{\beta^2}{\beta}=\beta$이고, $\overline{\text{PO}}\perp\overline{\text{QO}}$이므로 $\alpha\beta=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha\beta=2m-7=-1\qquad\therefore m=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x+1$

특목고 / 경시대회 실전문제

134~136쪽

01 $\frac{1}{108}$ **02** $\frac{1}{8}$ **03** $\frac{25(41-3\sqrt{73})}{32}(\pi-2)$
04 $2\sqrt{2}$ **05** 100 **06** 6π **07** 120 cm
08 최댓값 : 5, 최솟값 : 1 **09** 10

01 $y=ax^2-bx-c$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$a+b-c=0 \quad \therefore a+b=c \cdots$ ㉠

또, $y=ax^2-bx-c=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}-c$에서

꼭짓점의 x좌표가 1이므로 $\frac{b}{2a}=1$

$\therefore b=2a \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $c=3a$

따라서 $(a,\ b,\ c)=(a,\ 2a,\ 3a)$인 순서쌍을 찾으면

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 4,\ 6)$의 2가지이다.

따라서 확률은 $\frac{2}{6\times6\times6}=\frac{1}{108}$이다.

02 $\mathrm{A}(-2t,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3t)$, $\mathrm{C}(t,\ 0)\,(t>0)$이라 놓으면

$x=-2t$, t는 ax^2+bx+c의 두 근이다.

근과 계수와의 관계에서

$\frac{b}{a}=-(-2t+t)=t$, $\frac{c}{a}=(-2t)\cdot t=-2t^2$이다.

$\therefore \frac{b+c}{a}=-2t^2+t=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

$t>0$이므로 $t=\frac{1}{4}$일 때, 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖는다.

03 $y=\frac{4}{15}x^2-\frac{8}{3}x$를 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\frac{4}{15}x^2+\frac{8}{3}x=-\frac{4}{15}(x-5)^2+\frac{20}{3}$

$\overline{\mathrm{AD}}=2k$라 하면 $\mathrm{A}(5-k,\ k)$이고, 대입하여 정리하면

$k=\frac{-15+5\sqrt{73}}{8}\,(0<k<5)$

내접원의 반지름의 길이가 k이므로

(내접원의 넓이)$=k^2\pi$, □PQRS$=2k^2$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=k^2\pi-2k^2$

$=\frac{25(41-3\sqrt{73})}{32}(\pi-2)$

04 세 점의 좌표를 포물선의 식에 대입하면

$c=3$, $a+b+c=3$, $4a+2b+c=1$이므로

연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$, $c=3$이다.

$y=-x^2+x+3$과 $y=-x+k$가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $-x^2+x+3=-x+k$가 중근을 갖는다.

즉, $x^2-2x+k-3=0$에서 $(-2)^2-4(k-3)=0$

이므로 $k=4$이다.

점 A는 이차함수 $y=-x^2+x+3$의 그래프와

일차함수 $y=-x+4$의 그래프의 교점이므로 $\mathrm{A}(1,\ 3)$

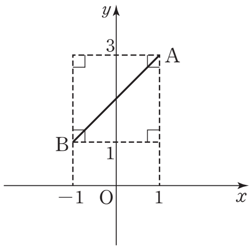
두 점 A와 B 사이의 거리가 최소가 될 때는 점 A에서 직선 $y=-x$에 내린 수선의 발이 B인 경우이다.

점 A를 지나고 $y=-x$에 수직인 직선의 방정식은

$y-3=x-1$에서 $y=x+2$이다.

점 B는 $y=-x$와 $y=x+2$의 교점이므로 $-x=x+2$에서

$x=-1$, $y=1 \quad \therefore \mathrm{B}(-1,\ 1)$



따라서 구하는 거리는 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ 사이의 거리이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 대각선으로 하는 정사각형을 만들면 파타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이다.

05 $y=(x-4)^2-16 \cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면 $0=(x-4)^2-16$, $x-4=\pm4$

$\therefore x=0$ 또는 $x=8 \qquad \therefore \mathrm{H}(8,\ 0)$

점 G의 x좌표는 0이고 $\overline{\mathrm{FG}}=1$이므로 점 F의 x좌표는 1이다.

㉠에 $x=1$을 대입하면 $y=(1-4)^2-16=-7$

$\therefore \mathrm{G}(0,\ -7)$, $\mathrm{F}(1,\ -7)$

점 E의 x좌표는 1이고 $\overline{\mathrm{DE}}=1$이므로 점 D의 x좌표는 2이다.

㉠에 $x=2$를 대입하면 $y=(2-4)^2-16=-12$

$\therefore \mathrm{E}(1,\ -12)$, $\mathrm{D}(2,\ -12)$

점 C의 x좌표는 2이고 $\overline{\mathrm{BC}}=1$이므로 점 B의 x좌표는 3이다.

㉠에 $x=3$을 대입하면 $y=(3-4)^2-16=-15$

$\therefore \mathrm{C}(2,\ -15)$, $\mathrm{B}(3,\ -15)$

점 A의 x좌표는 3이고 $\overline{\mathrm{AP}}$가 그래프의 꼭짓점을 지나므로

$\mathrm{A}(3,\ -16)$

마찬가지 방법으로 나머지 점들의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}(5,\ -16)$, $\mathrm{N}(5,\ -15)$, $\mathrm{M}(6,\ -15)$, $\mathrm{L}(6,\ -12)$, $\mathrm{K}(7,\ -12)$, $\mathrm{J}(7,\ -7)$, $\mathrm{I}(8,\ -7)$

따라서 구하는 다각형의 넓이는

□OGIH+□FEKJ+□DCML+□BAPN

$=56+30+12+2=100$

06 $y=\frac{1}{2}x^2$에서 점 A의 y좌표는 $\frac{3}{2}$이므로 $x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $A\left(\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$

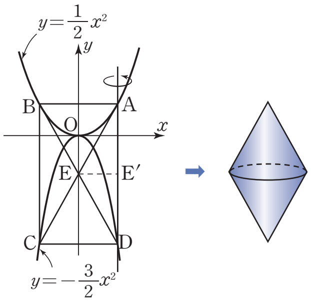
또, $y=-\frac{3}{2}x^2$에서 점 C의 x좌표는 $-\sqrt{3}$이므로

$y=-\frac{3}{2}\times(-\sqrt{3})^2=-\frac{9}{2}$ $\quad\therefore C\left(-\sqrt{3},\ -\frac{9}{2}\right)$

직사각형의 두 대각선의 교점 E는 $\overline{AC}$의 중점이므로

$$E\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2},\ \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}{2}\right)=\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$$

△AED를 $\overline{AD}$를 축으로 하여 1회전하여 생기는 회전체는 오른쪽 그림과 같으므로 회전체의 부피는 △AEE′을 회전하여 생기는 회전체의 부피의 2배와 같다.



$$\therefore 2\times\frac{1}{3}\times\left\{(\sqrt{3})^2\times\pi\times\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\right\}=6\pi$$

07 x축과 만나는 점이 $(70,\ 0)$, $(110,\ 0)$이고 한 점 $(80,\ 90)$을 지나므로 $y=a(x-70)(x-110)$에 $(80,\ 90)$을 대입하면

$-300a=90$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{10}$

$$y=-\frac{3}{10}(x-70)(x-110)$$
$$=-\frac{3}{10}(x^2-180x+7700)=-\frac{3}{10}(x-90)^2+120$$

따라서 $x=90$일 때, 최댓값 120을 가진다.

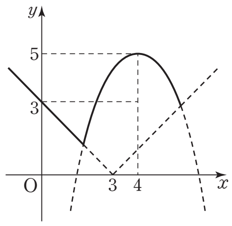
$\therefore$ 튀어 오른 공의 최고 높이는 120 cm이다.

08 $y=|x-3|$,

$y=-x^2+8x-11$

$\ =-(x-4)^2+5$

이므로 두 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=\mathrm{Max}\{|x-3|,\ -x^2+8x-11\}$은

두 그래프 중 위쪽에 있는 그래프를 택한 실선으로 나타낸다.

(i) $0\le x\le 3$일 때, $y=-x+3$과 $y=-x^2+8x-11$의 교점은

$-x+3=-x^2+8x-11$

즉, $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$ $\quad\therefore x=2$

따라서 $x=2$에서 최솟값 1을 가진다.

(ii) $x=0$ 또는 $x=6$일 때, $y=3$이므로 $x=4$에서 최댓값 5를 가진다.

09 평행이동한 그래프의 방정식은 $y=\frac{1}{a}(x-a)^2$이고,

$P(a,\ 0)$, $R(0,\ a)$이다.

이제, $\overline{OA}=\overline{AB}=x$라 하면 다음을 얻는다.

$x=\frac{1}{a}(x-a)^2$, $ax=x^2-2ax+a^2$,

$x^2-3ax+a^2=0$, $x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-4a^2}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}a$

그런데 $x<\overline{QP}=a$이므로 $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$이고, □OABC의 넓이로부터 다음을 얻는다.

□OABC$=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2a^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}a^2=50(7-3\sqrt{5})$,

$a^2=100$ $\quad\therefore a=10\ (\because a>0)$

따라서 □OPQR의 한 변의 길이가 10이므로 $\overline{PQ}$의 길이는 10이다.

Memo